Chapitre 5 : Définitions relatives aux fonctions à valeurs réelles

I Fonctions à valeurs réelles

Soit A un ensemble non vide. $\mathfrak{F}(A,\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des applications de A dans $\mathbb{R}$.

A) Somme, produit, produit par un réel

Pour $f,g\in\mathfrak{F}(A,\mathbb{R})$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, on définit :

$f+g : \underset{x\mapsto f(x)+g(x)}{A\to\mathbb{R}}$ $\quad fg : \underset{x\mapsto f(x)g(x)}{A\to\mathbb{R}}$ $\quad \lambda f : \underset{x\mapsto\lambda f(x)}{A\to\mathbb{R}}$

Si de plus g ne s'annule pas sur A, on pourra naturellement définir $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$.

B) Autres définitions

Pour $f,g\in\mathfrak{F}(A,\mathbb{R})$, on définit :

$\sup(f,g) : \underset{x\mapsto\sup(f(x),g(x))}{A\to\mathbb{R}}$ $\quad \inf(f,g) : \underset{x\mapsto\inf(f(x),g(x))}{A\to\mathbb{R}}$

Remarque : ces fonctions peuvent aussi bien être notées $\max(f,g)$ ou $\min(f,g)$.

Pour $f\in\mathfrak{F}(A,\mathbb{R})$, on définit aussi :

$f^+ : \underset{x\mapsto\sup(f(x),0)}{A\to\mathbb{R}}$ $\quad f^- : \underset{x\mapsto\sup(-f(x),0)}{A\to\mathbb{R}}$ $\quad |f| : \underset{x\mapsto|f(x)|}{A\to\mathbb{R}}$

Proposition :

$|f| = f^+ + f^-$ et $f = f^+ - f^-$

Démonstration :

Soit $x\in A$.

Si $f(x)\geq 0$, alors $f^+(x)=\sup(f(x),0)=f(x)$ et $f^-(x)=\sup(-f(x),0)=0$.

Donc $(f^+-f^-)(x)=f^+(x)-f^-(x)=f(x)-0=f(x)$

Et $(f^++f^-)(x)=f^+(x)+f^-(x)=f(x)+0=f(x)=|f(x)|=|f|(x)$

Si $f(x)\leq 0$, alors $f^+(x)=\sup(f(x),0)=0$ et $f^-(x)=\sup(-f(x),0)=-f(x)$.

Donc $(f^+-f^-)(x)=f^+(x)-f^-(x)=0-(-f(x))=f(x)$

Et $(f^++f^-)(x)=f^+(x)+f^-(x)=0-f(x)=-f(x)=|f(x)|=|f|(x)$

Donc $\forall x\in A$, $|f|(x)=(f^++f^-)(x)$ et $f(x)=(f^+-f^-)(x)$

Soit $|f|=f^++f^-$ et $f=f^+-f^-$.

C) Inégalités sur les fonctions

Pour $f, g \in \mathfrak{F}(A,\mathbb{R})$, on pose :

$f \leq g \underset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \forall x \in A, (f(x) \leq g(x))$

La relation $\leq$ définie ainsi sur $\mathfrak{F}(A,\mathbb{R})$ est une relation d'ordre partiel.

La notation $f < g$ signifie : $\forall x \in A, (f(x) < g(x))$

Attention, si $f \leq g$ et $f \neq g$, on a pas nécessairement pour autant $f < g$.

D) Fonctions majorées, minorées

Soit $f \in \mathfrak{F}(A,\mathbb{R})$. On rappelle que $f(A) = \{f(x), x \in A\} = \operatorname{Im} f$.

On a les équivalences :

- f est majorée $\underset{\text{déf}}{\Leftrightarrow}$ $f(A)$ est majoré
  $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, f(x) \leq M$
- f est minorée $\underset{\text{déf}}{\Leftrightarrow}$ $f(A)$ est minoré
  $\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A, m \leq f(x)$
- f est bornée $\underset{\text{déf}}{\Leftrightarrow}$ $f(A)$ est borné
  $\Leftrightarrow$ f est majorée et minorée
  $\Leftrightarrow$ $|f|$ est majorée

Si f est majorée, on peut introduire le réel $\sup f$, qu'on définit comme étant $\sup(f(A))$ (l'ensemble $f(A)$ admet bien une borne supérieure puisque c'est un ensemble de réels non vide et majoré).

Si l'ensemble $f(A)$ est non seulement majoré, mais admet un maximum, on l'appellera le maximum de f et on le notera $\max f$. On aura alors bien sûr $\max f = \sup f$, et on dira alors que la borne supérieure de f est atteinte (puisqu'il existe alors $a \in A$ tel que $f(a) = \max f = \sup f$).

De même, lorsque f est minorée, on peut introduire $\inf f$, qu'on note $\min f$ lorsque la borne inférieure est atteinte.

Enfin, lorsque f est bornée, on s'intéresse à $\sup|f|$

Notations équivalentes :

Sous réserve d'existence, $\sup f$ est aussi noté $\sup\limits_{x \in A} f(x)$, $\inf f$ noté $\inf\limits_{x \in A} f(x)$ …

II Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles

Il s'agit maintenant des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ et définies sur une partie non vide de $\mathbb{R}$. Dans toute la suite, D désigne une partie non vide de $\mathbb{R}$.

A) Fonctions monotones

Soit $f \in \mathfrak{F}(D,\mathbb{R})$.

f est croissante $\underset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \forall x \in D, \forall x' \in D, (x \leq x' \Rightarrow f(x) \leq f(x'))$.

f est strictement croissante $\underset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \forall x \in D, \forall x' \in D, (x < x' \Rightarrow f(x) < f(x'))$.

f est décroissante $\underset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \forall x \in D, \forall x' \in D, (x \leq x' \Rightarrow f(x') \leq f(x))$

f est strictement décroissante $\underset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \forall x \in D, \forall x' \in D, (x < x' \Rightarrow f(x') < f(x))$

f est monotone $\underset{\text{déf}}{\Leftrightarrow}$ f est croissante ou f est décroissante.

f est strictement monotone $\underset{\text{déf}}{\Leftrightarrow}$ f est strictement croissante/décroissante.

Remarque : dans le cas où $D = \mathbb{N}$, on retrouve les définitions données dans le cadre des suites réelles.

Proposition :
Toute fonction $f : D \to \mathbb{R}$ strictement monotone est injective.

Démonstration :
Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone.
Soient $x, x' \in D$, supposons que $f(x) = f(x')$.
Alors $x = x'$, car sinon :
Soit $x < x'$, et alors $f(x) < (x')$ ou $f(x') < (x)$ car f est strictement monotone, ce qui est impossible (car $f(x) = f(x')$).
Soit $x' < x$, et alors $f(x') < (x)$ ou $f(x) < (x')$ car f est strictement monotone, ce qui est aussi impossible (car $f(x) = f(x')$).
Donc $x = x'$.
Donc f est injective.

Proposition :
Soient $f, g \in \mathfrak{F}(D,\mathbb{R})$. Alors :
Si f et g sont monotones de même sens, alors $f + g$ l'est aussi, et de même sens.
Si f est monotone, alors $-f$ est monotone de sens contraire.
Si f et g sont positives et monotones de même sens, alors fg aussi.
Si f est strictement positive et monotone, alors $\frac{1}{f}$ est monotone de sens contraire.

Démonstrations :

- Supposons f et g monotones de même sens.

Soient $x \in D, x' \in D$. Supposons que $x \leq x'$. On a alors :
Soit $f(x) \leq f(x')$ et $g(x) \leq g(x')$ si f et g sont croissantes,
Soit $f(x') \leq f(x)$ et $g(x') \leq g(x)$ si f et g sont décroissantes.

Donc soit $f(x)+g(x) \leq f(x')+g(x')$, c'est-à-dire $(f+g)(x) \leq (f+g)(x')$, soit $f(x')+g(x') \leq f(x)+g(x)$, c'est-à-dire $(f+g)(x') \leq (f+g)(x)$. Donc $f+g$ est aussi monotone, et de même sens que *f* et *g*.

- Supposons *f* monotone.

Soient $x \in D, x' \in D$. Supposons que $x \leq x'$.

On a alors : $f(x) \leq f(x')$ si *f* est croissante, $f(x') \leq f(x)$ si *f* est décroissante.

Donc $(-f)(x') \leq (-f)(x)$ ou $(-f)(x) \leq (-f)(x')$.

Donc $-f$ est monotone, de sens contraire à *f* dans les deux cas.

- Supposons *f* et *g* positives et monotones de même sens.

Soient $x \in D, x' \in D$. Supposons que $x \leq x'$. On a alors :

$0 \leq f(x) \leq f(x')$ et $0 \leq g(x) \leq g(x')$ si *f* et *g* sont croissantes,

ou $0 \leq f(x') \leq f(x)$ et $0 \leq g(x') \leq g(x)$ si *f* et *g* sont décroissantes.

D'où on tire que $0 \leq (fg)(x) \leq (fg)(x')$ si *f* et *g* sont croissantes, ou $0 \leq (fg)(x') \leq (fg)(x)$ si *f* et *g* sont décroissantes.

Ainsi, fg est monotone et de même sens que *f* et *g*.

- Supposons *f* strictement positive et monotone.

Soient $x \in D, x' \in D$, supposons que $x \leq x'$. Alors :

$0 < f(x) \leq f(x')$ si *f* est croissante, ou $0 < f(x') \leq f(x)$ si *f* est décroissante.

Donc $\dfrac{1}{f(x')} \leq \dfrac{1}{f(x)}$ si *f* est croissante, $\dfrac{1}{f(x)} \leq \dfrac{1}{f(x')}$ si *f* est décroissante.

Donc $\frac{1}{f}$ est monotone, et de sens contraire à *f*.

Proposition :

Soient $f \in \mathfrak{F}(D,\mathbb{R})$, $g \in \mathfrak{F}(D',\mathbb{R})$, où *D'* est une partie de $\mathbb{R}$ contenant $f(D)$ (donc non vide), de sorte qu'on puisse parler de $g \circ f$.

Si *f* et *g* sont monotones de même sens, alors $g \circ f$ est croissante.

Si *f* et *g* sont monotones de sens contraires, alors $g \circ f$ est décroissante.

Démonstration :

- Supposons *f* et *g* monotones de même sens.

\- Si *f*, *g* sont croissantes :

Soient $x \in D, x' \in D$. Supposons $x \leq x'$. Alors :

Comme *f* est croissante, $f(x) \leq f(x')$.

$f(x) \in D, f(x') \in D$, et $f(x) \leq f(x')$. Donc, comme *g* est croissante :

$g(f(x)) \leq g(f(x'))$, c'est-à-dire $(g \circ f)(x) \leq (g \circ f)(x')$.

Donc $g \circ f$ est croissante.

\- Si *f*, *g* sont décroissantes :

Soient $x \in D, x' \in D$. Supposons $x \leq x'$. Alors :

Comme *f* est décroissante, $f(x') \leq f(x)$.

$f(x) \in D, f(x') \in D$, et $f(x') \leq f(x)$. Donc, comme *g* est croissante :

$g(f(x)) \leq g(f(x'))$, c'est-à-dire $(g \circ f)(x) \leq (g \circ f)(x')$.

Donc $g \circ f$ est croissante.

- Supposons *f* et *g* monotones de sens contraires.

- Si *f* est croissante et *g* décroissante :
Soient $x \in D, x' \in D$. Supposons $x \leq x'$. Alors :
Comme *f* est croissante, $f(x) \leq f(x')$.
$f(x) \in D, f(x') \in D$, et $f(x) \leq f(x')$. Donc, comme *g* est décroissante :
$g(f(x')) \leq g(f(x))$, c'est-à-dire $(g \circ f)(x') \leq (g \circ f)(x)$.
Donc $g \circ f$ est décroissante.
- Si *f* est décroissante et *g* croissante :
Soient $x \in D, x' \in D$. Supposons $x \leq x'$. Alors :
Comme *f* est décroissante, $f(x') \leq f(x)$.
$f(x) \in D, f(x') \in D$, et $f(x') \leq f(x)$. Donc, comme *g* est croissante :
$g(f(x')) \leq g(f(x))$, c'est-à-dire $(g \circ f)(x') \leq (g \circ f)(x)$.
Donc $g \circ f$ est décroissante.

B) Fonctions paires, impaires

Soit $f \in \mathfrak{F}(D, \mathbb{R})$.

f est paire $\underset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \forall x \in D, (-x \in D \text{ et } f(-x) = f(x))$

f est impaire $\underset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \forall x \in D, (-x \in D \text{ et } f(-x) = -f(x))$

On vérifie immédiatement les propriétés sur les fonctions paires et impaires suivantes :

Soient $f, g \in \mathfrak{F}(D, \mathbb{R})$.

Si *f* et *g* sont toutes les deux (im)paires, alors $f + g$ a la même parité que *f* et *g*.

Si *f* et *g* ont la même parité, alors fg est paire.

Si *f* et *g* sont de parités contraires, alors fg est impaire.

Si *f* est (im)paire, alors $-f$ l'est aussi.

Soient $f \in \mathfrak{F}(D, \mathbb{R})$, $g \in \mathfrak{F}(D', \mathbb{R})$, où *D'* est une partie de $\mathbb{R}$ contenant $f(D)$.

Si *f* est paire, et *g* est (im)paire, alors $f \circ g$ est paire.

Si *f* est impaire, et si *g* est impaire, alors $f \circ g$ est paire.

Si *g* est paire, alors $f \circ g$ est paire.

C) Fonctions périodiques

Soit $f \in \mathfrak{F}(D, \mathbb{R})$.

Soit $T \in \mathbb{R}^*$. On dit que *f* est *T*-périodique lorsque :

$\forall x \in D, (x + T \in D \text{ et } x - T \in D \text{ et } f(x+T) = f(x))$

On dit que *f* est périodique lorsqu'il existe $T \in \mathbb{R}^*$ tel que *f* est *T*-périodique.

Proposition :

La somme ou le produit de deux fonctions *T*-périodiques est *T*-périodique.

De plus, si $\dfrac{T}{T'} \in \mathbb{Q}$, alors la somme ou le produit d'une fonction *T*-périodique et d'une fonction *T'*-périodique est périodique.

- Soient $f, g \in \mathfrak{F}(D, \mathbb{R})$, T-périodiques.

Soit $x \in D$. Alors $x+T \in D$ et $x-T \in D$. De plus, on a :

$(f+g)(x+T) = f(x+T) + g(x+T) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$

et $(fg)(x+T) = f(x+T) \times g(x+T) = f(x) \times g(x) = (fg)(x)$

Ainsi, $f+g$ et fg sont bien T-périodiques.

- Déjà, pour $f \in \mathfrak{F}(D, \mathbb{R})$, si *f* est T-périodique, alors *f* est $-T$-périodique, et une récurrence immédiate montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, *f* est nT-périodique ; ainsi, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, *f* est nT-périodique :

On a, pour tout $x \in D$:

$x+(-T) \in D$ et $x-(-T) \in D$ et $f(x+(-T)) = f((x+(-T))+T) = f(x)$

Et, si *f* est nT-périodique ($n \in \mathbb{N}^*$), alors pour tout $x \in D$:

$x+nT \in D, x-nT \in D$, donc, comme *f* est T-périodique (hypothèse de départ) :

$x+nT+T \in D, (x+nT-T \in D), x-nT-T \in D, (x-nT+T \in D)$

Et $f(x+(n+1)T) = f(x+nT+T) = f(x+nT) = f(x)$,

Donc *f* est $(n+1)T$-périodique.

Soient maintenant $f \in \mathfrak{F}(D, \mathbb{R})$, T-périodique, et $g \in \mathfrak{F}(D, \mathbb{R})$, T'-périodique, où $\dfrac{T}{T'} \in \mathbb{Q}$. Soit $(n,p) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{T}{T'} = \dfrac{n}{p}$.

Comme *g* est nT'-périodique et *f* est pT-périodique – soit aussi nT'-périodique – $f+g$ et fg sont nT'-périodiques (ou pT-périodiques), donc périodiques.

Contre-exemple dans le cas où $\dfrac{T}{T'} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$:

On note $\chi_{\mathbb{Q}}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \chi_{\mathbb{Q}}(x) = 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ \chi_{\mathbb{Q}}(x) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$

(on l'appelle la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$)

Alors $\chi_{\mathbb{Q}}$ est 1-périodique.

Mais la fonction $f : x \mapsto \chi_{\mathbb{Q}}(x) + \sin(x)$ n'est pas périodique :

Supposons qu'elle le soit ; soit alors $T \in \mathbb{R}^*$ tel que *f* soit T-périodique.

Soit $T \in \mathbb{Q}^*$, alors $f(T) = f(0)$ soit $\chi_{\mathbb{Q}}(T) + \sin(T) = \chi_{\mathbb{Q}}(0) + \sin(0) = 1$.

Donc $\sin(T) = 1 - \chi_{\mathbb{Q}}(T) = 0$ car $\chi_{\mathbb{Q}}(T) = 1$.

Donc $T \in \pi\mathbb{Z}$, soit $T \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, puisque $T \neq 0$, ce qui est contradictoire puisqu'on avait supposé que $T \in \mathbb{Q}^*$, donc $T \notin \mathbb{Q}^*$

Donc $T \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Donc $\chi_{\mathbb{Q}}(T) + \sin(T) = \chi_{\mathbb{Q}}(0) + \sin(0) = 1$, soit $\sin(T) = 1 - \chi_{\mathbb{Q}}(T) = 1$

Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $T = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

Mais on a aussi $\chi_{\mathbb{Q}}(2T) + \sin(2T) = \chi_{\mathbb{Q}}(0) + \sin(0) = 1$, soit $\sin(2T) = 1$.

Il existe donc $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $2T = \dfrac{\pi}{2} + 2k'\pi$.

Mais alors $\dfrac{\pi}{4} + k'\pi = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, soit $\dfrac{1}{4} + k' = \dfrac{1}{2} + 2k$ donc $2k - k' = -\dfrac{1}{4}$, ce qui est contradictoire puisque $2k - k' \in \mathbb{Z}$. Donc $T \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, donc *f* n'est pas périodique.

D) Fonctions lipschitziennes

Soit $f \in \mathfrak{F}(D,\mathbb{R})$. Soit $k \in \mathbb{R}^+$.
On dit que *f* est *k*-lipschtzienne (ou lipschitzienne de rapport *k*) lorsque :
$\forall x \in D, \forall x' \in D, |f(x) - f(x')| \leq k|x - x'|$
On dit que *f* est lipschitzienne lorsqu'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que *f* est *k*-lipschitzienne.

Interprétation :
Soit C la courbe représentative de f dans un repère plan. Dire que f est lipschitzienne revient à dire que l'ensemble des pentes des cordes tracées entre deux points de C est borné.

Exemple :
La fonction $x \mapsto x^2$ est lipschitzienne sur $[0;1]$, alors que $x \mapsto \sqrt{x}$ ne l'est pas.
- En effet, pour tout $x, x' \in [0;1]$, on a :
$|x^2 - x'^2| = |(x + x')(x - x')| = |x + x'||x - x'| \leq 2|x - x'|$.
Donc $x \mapsto x^2$ est 2-lipschitzienne sur $[0;1]$.
- Supposons qu'elle le soit. Soit alors $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $x \mapsto \sqrt{x}$ soit *k*-lipschitzienne
On a alors, pour tout $x \in [0;1]$:
$\left|\sqrt{x} - \sqrt{0}\right| \leq k|x - 0| \leq (k+1)|x - 0|$
Donc $\forall x \in [0;1], \sqrt{x} \leq (k+1)x$.
Or, pour $x = \dfrac{1}{2(k+1)^2} \in [0,1]$, on a :
$\sqrt{x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}(k+1)}$ et $(k+1)x = \dfrac{k+1}{2(k+1)^2} = \dfrac{1}{2(k+1)}$, mais $\dfrac{1}{\sqrt{2}(k+1)} > \dfrac{1}{2(k+1)}$, on a donc trouvé $x \in [0;1]$ tel que $\text{non}(\sqrt{x} \leq (k+1)x)$. Donc l'hypothèse de départ est fausse, donc $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne.

E) Extremum local, global

Soit $f \in \mathfrak{F}(D,\mathbb{R})$, et soit $a \in D$.
On dit que *f* présente un maximum (global) en *a* lorsque $\forall x \in D, f(x) \leq f(a)$.
Cela revient à dire que *f* admet un maximum, et que $\max f = f(a)$.
On dit que *f* présente un maximum local en *a* s'il existe un voisinage *V* de *a* tel que $\forall x \in D \cap V, f(x) \leq f(a)$.
Cela revient à dire que $f_{/D\cap V}$ présente un maximum (global) en *a*.
La définition est analogue pour un minimum global ou local en *a*.
On rappelle que « extremum » signifie : maximum ou minimum.

F) Propriété vraie sur une partie du domaine de définition

Soit P une propriété quelconque qu'une fonction réelle d'une variable réelle est susceptible d'avoir (par exemple « être positive », « être croissante »…)

Soit $f \in \mathfrak{F}(D, \mathbb{R})$

- Soit D' une partie de D.

On dit que f a la propriété P sur D' lorsque $f_{/D'}$ a la propriété P.

(Comme dans le D) pour dire que $x \mapsto x^2$ est k-lipschitzienne sur $[0;1]$).

- Soit a un point de $\overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D.

On dit que f a la propriété P au voisinage de a lorsqu'il existe un voisinage V de a tel que $f_{/D \cap V}$ a la propriété P.

Remarque :

Attention aux pièges du langage : une phrase telle que « f n'a pas la propriété P au voisinage de a » est ambiguë :

On peut l'interpréter comme : « non(f a la propriété P au voisinage de a) », qui signifie « quel que soit le voisinage de a, f n'a pas la propriété P sur $D \cap V$ ».

Mais on peut l'interpréter aussi comme « f a la propriété non(P) au voisinage de a », qui signifie « il existe un voisinage V de a tel que f n'a pas la propriété P sur $D \cap V$ ».

C'est en général la première interprétation qui est la bonne, mais c'est surtout le bon sens qui permet de décider.