Chapitre 7 : Limite en un point (pour une fonction réelle d'une variable réelle)

Dans tout ce chapitre, D désigne une partie non vide de $\mathbb{R}$.

I Généralités

A) Définition

Soit $f : D \to \mathbb{R}$, soit $a \in \mathrm{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(D)$.

Soit $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

On dit que f tend vers l en a - ou que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers a – et on note $f \underset{a}{\to} l$ - ou $f(x) \xrightarrow[x \mapsto a]{} l$ – lorsque $\forall W \in V(l), \exists V \in V(a), f(V \cap D) \subset W$.

Variantes de définition dans des cas particuliers :

- $\boxed{\text{Si } a \in \mathbb{R}, l \in \mathbb{R}}$:

$f \underset{a}{\to} l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, (|x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$.

Démonstration :

$\Rightarrow$ supposons que $f \underset{a}{\to} l$.

Soit $\varepsilon > 0$; on note $W =]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$.

Alors W est un voisinage de l. Il existe donc $V \in V(a)$ tel que $f(V \cap D) \subset W$.

Mais V contient une boule ouverte de centre a.

Il existe donc $\alpha > 0$ tel que $]a - \alpha, a + \alpha[\subset V$.

Donc $\forall x \in D, \underbrace{|x-a| < \alpha}_{x \in]a-\alpha, a+\alpha[\subset V} \Rightarrow \underbrace{|f(x) - l| < \varepsilon}_{f(x) \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[= W}$. D'où la première implication.

$\Leftarrow$ supposons que $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, (|x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$.

Soit $W \in V(l)$. Soit alors $\varepsilon > 0$ tel que $]l - \varepsilon, l + \varepsilon[\subset W$.

Il existe donc $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in D, (|x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$.

On pose $V =]a - \alpha, a + \alpha[$.

Alors $V \in V(a)$, et on a $f(V \cap D) \subset]l - \varepsilon, l + \varepsilon[\subset W$.

- $\boxed{\text{Si } a \in \mathbb{R}, l = +\infty}$:

$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, (|x-a| < \alpha \Rightarrow f(x) > A)$

(même démonstration, en utilisant des voisinages de $+\infty$)

- $\boxed{\text{Si } a = +\infty, l \in \mathbb{R}}$:

$f \underset{a}{\to} l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in D, (x > A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$

- $\boxed{\text{Si } a = +\infty, l = +\infty}$:

$f \underset{a}{\to} l \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in D, (x > B \Rightarrow f(x) > A)$

Cas particulier : $D=\mathbb{N}$.
Soit $a\in \mathrm{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathbb{N})$, $l\in\overline{\mathbb{R}}$:
$f\underset{a}{\to} l \Leftrightarrow \forall W\in V(l), \exists U\in V(a), \forall n\in\mathbb{N}, (n\in U \Rightarrow f(n)\in W)$
Dans le cas $a=+\infty$, $U\in V(+\infty)\Leftrightarrow \exists N\in\mathbb{N},]N,+\infty[\subset U$
$f(n)\xrightarrow[n\mapsto+\infty]{} l \Leftrightarrow \forall W\in V(l), \exists N\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N}, (n\geq N\Rightarrow f(n)\in W)$
Le cas $a=n_0\in\mathbb{N}$ est sans intérêt…

B) Théorème (unicité de la limite éventuelle)

Théorème :
Soit $f:D\to\mathbb{R}$, soit $a\in\mathrm{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(D)$, soient $l,l'\in\overline{\mathbb{R}}$.
Si $f\underset{a}{\to} l$ et $f\underset{a}{\to} l'$, alors $l=l'$.

Démonstration :
Supposons $l\neq l'$.
Il existe donc $W\in V(l)$ et $W'\in V(l')$ tels que $W\cap W'=\varnothing$.
Alors :
D'une part, il existe $U\in V(a)$ tel que $f(U\cap D)\subset W$.
D'autre part, il existe $U'\in V(a)$ tel que $f(U'\cap D)\subset W'$.
Alors $\forall x\in U\cap U'\cap D, f(x)\in W\cap W'$.
Contradiction car $U\cap U'\cap D\neq\varnothing$. En effet :
$U\cap U'\in V(a)$, car $U\in V(a), U'\in V(a)$.
De plus, $\forall V\in V(a), V\cap D\neq\varnothing$, puisque $a\in\mathrm{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(D)$.
Donc en particulier $U\cap U'\cap D\neq\varnothing$.
D'où l'unicité de la limite.
Notation :
Si $f\underset{a}{\to} l$, on note $l=\lim\limits_{a} f$
Et si $f(x)\xrightarrow[x\mapsto a]{} l$, on note $l=\lim\limits_{x\mapsto a} f(x)$.

C) Remarque

Si $f:D\to\mathbb{R}$, $a\in\mathrm{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(D)$ et si $f\underset{a}{\to} l$, alors $l\in\mathrm{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(f(D))$.

En effet, tout voisinage de l rencontre $f(D)$, puisque si $W\in V(l)$, on peut trouver $U\in V(a)$ tel que $f(U\cap D)\subset W$, et comme $U\cap D\neq\varnothing$, pour $x\in U\cap D$, on a bien $f(x)\in W$.

D) Continuité en un point

Théorème :
Soit $f:D\to\mathbb{R}$, et soit $a\in D$.
Si f admet une limite en a, alors cette limite est $f(a)$

Démonstration :

Supposons que $f \underset{a}{\rightarrow} l$, avec $l \neq f(a)$.

On peut alors trouver $W \in V(l)$ tel que $f(a) \notin W$.

Or, il existe $U \in V(a)$ tel que $f(U \cap D) \subset W$ (car $f \underset{a}{\rightarrow} l$ et $W \in V(l)$), ce qui est contradictoire, car $a \in U \cap D$. Donc $f(a) = l$.

On dit alors que *f* est continue en *a*.

E) Exemples

1) Fonction constante

Soit $K \in \mathbb{R}$. Soit $f : \begin{array}{l} D \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto K \end{array}$.

Alors $\forall a \in \mathrm{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(D)$, $f \underset{a}{\rightarrow} K$

Démonstration :

Soit $W \in V(K)$, prenons $U = \mathbb{R}$.

Alors $U \in V(a)$ et on a bien $f(U \cap D) \subset W$.

2) Identité

Soit $f : \begin{array}{l} D \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \end{array}$. Alors $\forall a \in \mathrm{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(D)$, $f \underset{a}{\rightarrow} a$.

Démonstration :

Soit $W \in V(a)$. Prenons alors $U = W$.

Alors $U \in V(a)$ et $f(U \cap D) \subset W$.

II Théorème de « composition » de limites

A) Théorème

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ où E est une partie de $\mathbb{R}$ telle que $f(D) \in E$.

Soit $a \in \mathrm{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(D)$, $b \in \overline{\mathbb{R}}, l \in \overline{\mathbb{R}}$

Si *f* tend vers *b* en *a* et si *g* tend vers *l* en *b*, alors $g \circ f$ tend vers *l* en *a*.

Démonstration :

Déjà, si $f \underset{a}{\rightarrow} b$, alors $b \in \mathrm{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(f(D))$, donc $b \in \mathrm{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(E)$.

Montrons que $g \circ f \underset{a}{\rightarrow} l$. Soit $W \in V(l)$.

Comme $g \underset{b}{\rightarrow} l$, il existe $V \in V(b)$ tel que $g(V \cap E) \subset W$.

Comme $f \underset{a}{\rightarrow} b$, il existe $U \in V(a)$ tel que $f(U \cap D) \subset V$.

Alors $g \circ f(U \cap D) \subset W$:

Si $x \in U \cap D$, alors $f(x) \in V$. De plus, $f(x) \in f(D) \subset E$.

Donc $f(x) \in V \cap E$. Donc $g \circ f(x) \in W$.

Donc $\forall W \in V(l), \exists U \in V(a), g \circ f(U \cap D) \subset W$.

B) Cas particulier (suites)

Soient $f : D \to \mathbb{R}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in D^{\mathbb{N}}$, $a \in \mathrm{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(D)$

Si $u_n \xrightarrow[n\mapsto+\infty]{} a$, et si $f(x) \xrightarrow[x\mapsto a]{} l$, alors $f(u_n) \xrightarrow[n\mapsto+\infty]{} l$.

C) Réciproque

Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in \mathrm{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(D)$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in D^{\mathbb{N}}$ qui tend vers *a*, $f(u_n)$ tend vers *l*, alors *f* tend vers *l* en *a*.

Démonstration :

Montrons la contraposée :

Supposons que $\mathrm{non}(f \underset{a}{\to} l)$,

C'est-à-dire que $\mathrm{non}(\forall W \in V(l), \exists U \in V(a), f(U \cap D) \subset W)$

Ou : $\exists W \in V(l), \forall U \in V(a), \exists x \in U \cap D, f(x) \notin W)$

Soit W un tel voisinage.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, posons :

$$\begin{cases} U_n = \left]a - \dfrac{1}{n+1}, a + \dfrac{1}{n+1}\right[\text{ si } a \in \mathbb{R} \\ U_n = \left]n, +\infty\right[\text{ si } a = +\infty \\ U_n = \left]-\infty, -n\right[\text{ si } a = -\infty \end{cases}$$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in V(a)$

Il existe donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in U_n \cap D$ tel que $f(x_n) \notin W$

Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}}$, tend vers *a* et $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers *l*.

En effet :

- $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in D$ par construction.
- Si $a \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, a - \dfrac{1}{n+1} < x_n < a + \dfrac{1}{n+1}$

  Si $a = +\infty : \forall n \in \mathbb{N}, x_n > n$

  Si $a = -\infty : \forall n \in \mathbb{N}, x_n < -n$

Ainsi, dans les trois cas, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to a$

- $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \notin W$

Donc $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers *l*. On a donc trouvé une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}}$ qui tend vers *a* et telle que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers *l*, d'où la démonstration de la contraposée.

III Limite selon une partie

A) Généralités

Soit $f : D \to \mathbb{R}$, soit $a \in \text{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(D)$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Soit X une partie non vide de D. Si $a \in \text{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(X)$, et si $f_{/X}$ tend vers l en a, on dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a selon X, et on note : $f(x) \xrightarrow[\substack{x \mapsto a \\ x \in X}]{} l$.

Proposition :

Si $f \underset{a}{\to} l$, alors $f_{/X} \underset{a}{\to} l$ (si $a \in \text{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(X)$)

Démonstration :

Supposons que $f \underset{a}{\to} l$.

Soit $W \in V(l)$. Il existe donc $U \in V(a)$ tel que $f(U \cap D) \subset W$. Comme $X \subset D$, on a bien alors $f(U \cap X) \subset f(U \cap D) \subset W$, soit $f_{/X}(U \cap X) \subset W$, d'où le résultat.

B) Cas particulier

Lorsque $X = U \cap V$:

Soient $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in \text{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(D)$, $V \in V(a)$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Alors $a \in \text{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(D \cap V)$, et : $f \underset{a}{\to} l \Leftrightarrow f_{V \cap D} \underset{a}{\to} l$.

On dit que la notion de limite est locale.

Démonstration :

$\Rightarrow$: vu en A).

$\Leftarrow$: supposons que $f_{V \cap D} \underset{a}{\to} l$.

Soit $W \in V(l)$. Il existe $U \in V(a)$ tel que $f(U \cap (V \cap D)) \subset W$.

Si on prend $U' = V \cap U$, alors $U' \in V(a)$ et $f(U' \cap D) \subset W$.

C) Autre cas particulier

Soient $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in \text{Adh}_{\mathbb{R}}(D)$ (Attention ! ici, $a \in \mathbb{R}$)

- Si a est adhérent à $D \cap]a,+\infty[$, et si $f_{/D \cap]a,+\infty[}$ a une limite l en a, on dit que f a une limite à droite en a, notée $\lim\limits_{\substack{x \mapsto a \\ x > a}} f(x)$, ou $\lim\limits_{a^+} f$.
- On adapte pour la limite à gauche.

Si $a \in D$, et a est adhérent à $D \cap]a,+\infty[$ et à $D \cap]-\infty, a[$, alors f a une limite en a si et seulement si f a une limita à droite et à gauche en a, égales toutes les deux à $f(a)$.

Si $a \notin D$, mais est adhérent à $D \cap]a,+\infty[$ et à $D \cap]-\infty, a[$, f a une limite en a si et seulement si f a une limite à droite et à gauche en a et si elles sont égales.

Remarque :

Si $D =]a,+\infty[$, la notion de $\lim\limits_{a^+} f$ et $\lim\limits_{a} f$ se confond.

Si $D=[a,+\infty[$, f a une limite en a si et seulement si f a une limite à droite égale à $f(a)$.

On fait de même pour $]-\infty,a]$.

Définition :

Soit $f:D\to\mathbb{R}$, soit $a\in D$.

Alors f est continue à droite en a $\Leftrightarrow$ $f_{/D\cap[a,+\infty[}$ est continue en a.

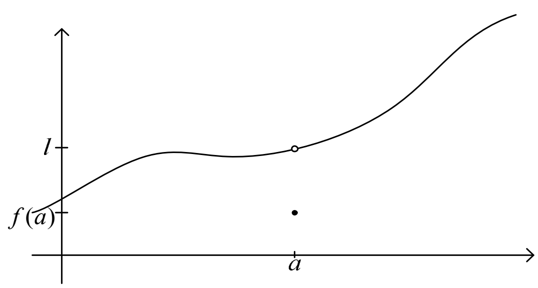
$\Leftrightarrow$ f a une limite à droite en a égale à $f(a)$.

De même à gauche.

D) Autre cas particulier utile

Soit $f:D\to\mathbb{R}$, soit $a\in D$ adhérent à $D\setminus\{a\}$ (c'est-à-dire que tout voisinage de a contient au moins un point autre que a, soit que a n'est pas un point isolé).

Si $f_{/D\setminus\{a\}}$ a une limite en a, on la note $\lim\limits_{\substack{x\mapsto a\\x\neq a}} f(x)$.



Sur le dessin :

$\lim\limits_{\substack{x\mapsto a\\x\neq a}} f(x)=l\neq f(a)$

Mais $\lim\limits_{x\mapsto a} f(x)$ n'existe pas.

Proposition :

Si a est adhérent à $D\setminus\{a\}$, alors :

f a une limite en a $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{\substack{x\mapsto a\\x\neq a}} f(x)$ existe et vaut $f(a)$.

E) Prolongement par continuité en un point

Définition :

Soit $f:D\to\mathbb{R}$. On suppose que a est adhérent à D (dans $\mathbb{R}$), mais que $a\notin D$.

Soit $g:D\cup\{a\}\to\mathbb{R}$. On dit que g est un prolongement par continuité de f en a lorsque :

- $\forall x\in D, g(x)=f(x)$
- g est continue en a.

Proposition :

f admet un prolongement par continuité en a si et seulement si f admet une limite finie en a. Dans ce cas, l'unique prolongement par continuité de f en a est la fonction :

$$g:\ D\cup\{a\}\rightarrow\mathbb{R}$$
$$x\mapsto\begin{cases} f(x)\text{ si } x\in D\\ \lim\limits_{x\mapsto a} f(x)\text{ si } x=a\end{cases}$$

IV Limites et inégalités

Proposition :

Soient $f:D\rightarrow\mathbb{R}$, $a\in \mathrm{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(D)$.

Si f a une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a.

Si f tend vers $+\infty$ en a, alors f est non(majorée au voisinage de a).

Si f tend vers $-\infty$ en a, alors f est non(minorée au voisinage de a).

(Rappel : f a la propriété P au voisinage de a s'il existe un voisinage U de a tel que $f_{/U\cap D}$ ait la propriété P)

En effet :

- Si $\lim\limits_a f$ existe, vaut $l\in\mathbb{R}$ alors, selon la définition de limite, il existe $U\in V(a)$ tel que $\forall x\in D\cap U, f(x)\in\left]l-1,l+1\right[$. Donc f est bornée sur $D\cap U$.
- Si $f\underset{a}{\rightarrow}+\infty$. Montrons que $\forall U\in V(a), f_{/D\cap U}$ n'est pas majorée.

Soit $U\in V(a)$. Supposons qu'il existe $M\in\mathbb{R}$ tel que $\forall x\in D\cap U, f(x)\leq M$.

Mais, selon la définition de limite, il existe $V\in V(a)$ tel que $\forall x\in V\cap U, f(x)>M$,

ce qui est contradictoire, puisque $D\cap U\cap V$ n'est pas vide (car a est adhérent à D, donc tout voisinage de a rencontre D, et de plus U et V sont des voisinages de a)

- Adapter si $f\underset{a}{\rightarrow}-\infty$.

Proposition :

Soient $f:D\rightarrow\mathbb{R}$, $a\in \mathrm{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(D)$.

Si f tend vers $l\in\mathbb{R}_+^*\cup\{+\infty\}$ en a, alors $f>0$ au voisinage de a.

Si f tend vers $l\in\mathbb{R}_-^*\cup\{-\infty\}$ en a, alors $f<0$ au voisinage de a.

Démonstration :

Dans le premier cas, et $l\in\mathbb{R}_+^*$

On pose $W=B(l,\frac{l}{2})$ (ainsi, $\forall x\in W, x>0$).

Il existe alors $V\in V(a)$ tel que $f(V\cap D)\subset W$.

Donc $\forall x\in V\cap D, f(x)\in W$, soit $\forall x\in V\cap D, f(x)>0$.

Si $l=+\infty$: il suffit de prendre $W=\left[1;+\infty\right[$, et on aura le même résultat.

On fait de la même façon dans le deuxième cas.

Proposition :

Soient $f:D\rightarrow\mathbb{R}$, $g:D\rightarrow\mathbb{R}$. Soit $a\in \mathrm{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(D)$.

Si $f\leq g$ et si f et g on des limites en a, alors $\lim\limits_a f\leq\lim\limits_a g$.

On peut se contenter d'un voisinage de a pour la propriété $f\leq g$.

Démonstrations :

Notons $l = \lim_a f$ et $l' = \lim_a g$, supposons que $l > l'$.

Cas où $l, l' \in \mathbb{R}$.

Prenons $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $0 < \varepsilon < \dfrac{l-l'}{2}$

Il existe alors $U \in V(a)$ tel que $\forall x \in U \cap D, f(x) \in \left]l-\varepsilon, l+\varepsilon\right[$

Et $U' \in V(a)$ tel que $\forall x \in U' \cap D, g(x) \in \left]l'-\varepsilon, l'+\varepsilon\right[$.

Alors $U \cap U' \cap D \neq \varnothing$, et pour $x \in U \cap U' \cap D$, $g(x) < l'+\varepsilon < l-\varepsilon < f(x)$, ce qui est contradictoire.

Autre démonstration :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de D qui tend vers a.

(Il en existe puisque $a \in \mathrm{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(D)$).

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) \leq g(u_n)$.

Mais, comme f a une limite en a, on sait que $f(u_n) \xrightarrow[n\mapsto+\infty]{} \lim_a f$,

Et, comme g a une limite en a, $g(u_n) \xrightarrow[n\mapsto+\infty]{} \lim_a g$.

Donc, selon le théorème de passage à la limite pour les suites, $\lim_a f \leq \lim_a g$.

Théorème « des gendarmes » :

Soient $f, g, h : D \to \mathbb{R}$, soit $a \in \mathrm{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(D)$.

On suppose que $\forall x \in D, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

Si f et h admettent une même limite l en a, alors g tend aussi vers l en a.

Démonstration :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}}$ qui tend vers a.

Alors, selon le théorème de composition de limite, $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}} \to l$ et $(h(u_n))_{n\in\mathbb{N}} \to l$.

Or, $\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) \leq g(u_n) \leq h(u_n)$.

Donc $(g(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l en a, d'après le théorème des gendarmes pour les suites.

C'est valable pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}}$ qui tend vers a, donc g tend vers l en a.

V Limites et opérations sur les fonctions

A) Cas des limites finies

Proposition :

Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$, $a \in \mathrm{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(D)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $\begin{cases} f \xrightarrow[a]{} l \in \mathbb{R} \\ g \xrightarrow[a]{} l' \in \mathbb{R} \end{cases}$, alors $\begin{cases} f+g \xrightarrow[a]{} l+l' \\ \lambda f \xrightarrow[a]{} \lambda l \\ f \times g \xrightarrow[a]{} l \times l' \end{cases}$

Démonstration :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}}$ qui tend vers a. Alors $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}} \to l$, $(g(u_n))_{n\in\mathbb{N}} \to l$.

Donc par théorème de composition de limites pour les suites, $(f(u_n)+g(u_n))_{n\in\mathbb{N}} \to l+l'$, c'est-à-dire $((f+g)(u_n))_{n\in\mathbb{N}} \to l+l'$.

Ce résultat est valable pour toute suite qui tend vers *a*. Donc $f+g \underset{a}{\to} l+l'$.

On procède de même avec $\lambda f, f\times g$.

Proposition :

Soit $f: D\to\mathbb{R}$, $a\in \mathrm{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(D)$.

Si $f\underset{a}{\to} l\in\mathbb{R}$, alors $|f|\underset{a}{\to}|l|$, et, si $l\neq 0$, $\frac{1}{f}$ est définie au voisinage de *a* et $\dfrac{1}{f}\underset{a}{\to}\dfrac{1}{l}$

Démonstration :

Utiliser les suites comme précédemment (pour dire que $\frac{1}{f}$ est défini au voisinage de *a* lorsque $l\neq 0$, il suffit d'utiliser la deuxième proposition vue en **IV**)

Remarque :

Soit $f: D\to\mathbb{R}$, $a\in \mathrm{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(D)$.

Soit $l\in\mathbb{R}$.

On a les équivalences :

$f\underset{a}{\to} l \Leftrightarrow f-l\underset{a}{\to} 0 \Leftrightarrow |f-l|\underset{a}{\to} 0$

Démonstration :

$$f\underset{a}{\to} l \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists U\in V(a), \forall x\in D\cap U, \underbrace{|f(x)-l|}_{\substack{=|f(x)-l-0| \\ =||f(x)-l|-0|}} < \varepsilon$$

En particulier,

$f\underset{a}{\to} 0 \Leftrightarrow |f|\underset{a}{\to} 0$

Proposition :

Soient $f,g: D\to\mathbb{R}$, $a\in \mathrm{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(D)$.

Si $f\underset{a}{\to} 0$, et si *g* est bornée au voisinage de *a*, alors $fg\underset{a}{\to} 0$

B) Cas où certaines limites sont infinies

Soient $f,g: D\to\mathbb{R}$, $a\in \mathrm{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(D)$.

- Si $f\underset{a}{\to}+\infty$, alors, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$:

$$\lambda f \underset{a}{\to} \begin{cases} +\infty \text{ si } \lambda>0 \\ 0 \text{ si } \lambda=0 \\ -\infty \text{ si } \lambda<0 \end{cases}$$

- Si $f\underset{a}{\to}+\infty$, et si *g* est minorée, alors $f+g\underset{a}{\to}+\infty$
- Si $f\underset{a}{\to}+\infty$, et si *g* est minorée par $\alpha>0$, alors $fg\underset{a}{\to}+\infty$
- Si $f\underset{a}{\to}+\infty$, alors $\frac{1}{f}$ est définie au voisinage de *a* et $\frac{1}{f}\underset{a}{\to}0$

- Si $f \underset{a}{\longrightarrow} 0$, et si $f > 0$ au voisinage de a (c'est-à-dire $f \underset{a}{\longrightarrow} 0^+$), alors $\frac{1}{f} \underset{a}{\longrightarrow} +\infty$.

C) Les indéterminations

Ce sont les cas où le cours ne permet pas de conclure, car il y a différentes possibilités.

• << $+\infty - \infty$ >>
Exemples :
$x^2 - x \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $x - x^2 \underset{+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, $x - x \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$, $x + 3 - x \underset{+\infty}{\longrightarrow} 3$, $x + \sin x - x$ pas de limite.
• << $0 \times \infty$ >>
Exemples :
$\frac{1}{x} x^2 \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $\frac{1}{x^2} x \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\frac{1}{x} x \underset{+\infty}{\longrightarrow} 1$, $\frac{\sin x}{x} x$ pas de limite en $+\infty$.
• << 1^∞ >>
si $f(x) \underset{a}{\longrightarrow} 1$, $g(x) \underset{a}{\longrightarrow} +\infty$:
On s'intéresse à $F(x) = f(x)^{g(x)}$
Mais $F(x) = \exp(\underbrace{g(x)}_{\to+\infty}\underbrace{\ln(f(x))}_{\to 0})$
On est ainsi ramené à une indétermination du type << $0 \times \infty$ >>
• << 0^0 >>
Si $f(x) \to 0$ et $f(x) > 0$
Et $g(x) \to 0$
$F(x) = f(x)^{g(x)} = \exp(\underbrace{g(x)}_{\to 0}\underbrace{\ln(f(x))}_{\to -\infty})$

D) Limites et fonctions usuelles

- On a vu que $x \mapsto 1$ et $x \mapsto x$ sont continues en tout point de $\mathbb{R}$. Donc toute fonction polynomiale est continue sur $\mathbb{R}$. Il en est de même des fractions rationnelles (sur leur domaine de définition).
- La fonction $\cos$ est continue sur $\mathbb{R}$.

En effet, $\forall x, x' \in \mathbb{R}, \cos x - \cos x' = -2\sin\left(\frac{x+x'}{2}\right)\sin\left(\frac{x-x'}{2}\right)$

Donc $\forall x, x' \in \mathbb{R}, \left|\cos x - \cos x'\right| \leq 2\underbrace{\left|\sin\left(\frac{x+x'}{2}\right)\right|}_{\leq 1}\underbrace{\left|\sin\left(\frac{x-x'}{2}\right)\right|}_{\leq\left|\frac{x-x'}{2}\right|} \leq |x - x'|$

Donc $\cos$ est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, donc continue.

Montrons que si une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne, alors f est continue sur D.

Soit $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x, x' \in D, \left|f(x) - f(x')\right| \leq k|x - x'|$.

Soit $a\in D$. Alors $\forall x\in D, |f(x)-f(a)|\leq k\underbrace{|x-a|}_{\to 0 \text{ en } a}$

Donc $f(x)\xrightarrow[x\mapsto a]{} f(a)$. Donc *f* est continue en *a*, donc en tout point de *D*.

• $\forall x\in \mathbb{R}, \sin(x)=\cos(\frac{\pi}{2}-x)$

Donc, par composition, la fonction $\sin$ est continue.

• $\forall x\in \mathbb{R}, \tan(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Donc la fonction $\tan$ est continue sur son domaine de définition.

• $\exp, \ln$ sont continues sur leur domaine de définition.

• Soit $\alpha\in\mathbb{R}$.

La fonction $x\mapsto x^{\alpha}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, si $\alpha>0$, la fonction est prolongeable par continuité en 0 par 0.

• $x\mapsto \sqrt[n]{x}$, où $n\in\mathbb{N}^*$ sont définies et continues sur $\mathbb{R}_+$

• Les fonctions $x\mapsto x^n$ pour $n\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$ sont définies et continues sur $\mathbb{R}^*$.

E) Remarque technique : « le retour à 0 »

• Pour la limite :

Soit $f:D\to\mathbb{R}$, $a\in \text{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(D)$.

Soit $l\in\mathbb{R}$.

$f\xrightarrow[a]{} l \Leftrightarrow f-l\xrightarrow[a]{} 0$

• Pour la variable :

Soit $f:D\to\mathbb{R}$, $a\in \text{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(D)$.

Soit $l\in\mathbb{R}$.

$f(x)\xrightarrow[x\mapsto a]{} l \Leftrightarrow f(a+u)\xrightarrow[u\mapsto 0]{} l$

Démonstration :

$\Rightarrow$: supposons que $f(x)\xrightarrow[x\mapsto a]{} l$.

Alors $a+u\xrightarrow[u\mapsto 0]{} a$, et $f(x)\xrightarrow[x\mapsto a]{} l$.

Donc, par composition, $f(a+u)\xrightarrow[u\mapsto 0]{} l$

$\Leftarrow$: supposons que $f(a+u)\xrightarrow[u\mapsto 0]{} l$.

Alors $x-a\xrightarrow[x\mapsto a]{} 0$ et $f(a+u)\xrightarrow[u\mapsto 0]{} l$.

Donc, par composition, $f(a+(x-a))\xrightarrow[x\mapsto a]{} l$, soit $f(x)\xrightarrow[x\mapsto a]{} l$.

Exemple :

Etude de l'éventuelle limite en 3 de $f(x)=\dfrac{x^4-3^4}{\sin(x)-\sin(3)}$

Domaine de définition : $\mathbb{R}\setminus(\{3+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\pi-3+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\})=D$

Donc $3\in\text{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(D)$

Pour $u \neq 0$ et suffisamment proche de 0, on a :

$$f(3+u) = \frac{(3+u)^4 - 3^4}{\sin(3+u) - \sin(3)} = \frac{4\times 3^3 u + 6\times 3^2 u^2 + 4\times 3 \times u^3 + u^4}{2\cos\left(\frac{6+u}{2}\right)\sin\left(\frac{u}{2}\right)} \underset{u\mapsto 0}{\sim} \frac{4\times 3^3 u}{2\cos(3)\frac{u}{2}}$$

Donc $f(3+u) \underset{u\mapsto 0}{\sim} \dfrac{4\times 3^3}{\cos(3)}$, d'où la limite en 3…

VI Le théorème de la limite monotone pour les fonctions

Théorème :

Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, avec $a < b$

Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$, monotone. Alors *f* a une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ en *a* et en *b*.

Plus précisément :

- Si *f* est croissante :
- Si *f* est majorée, elle a une limite réelle en *b* (qui est $\sup(f)$)

Sinon, $f \underset{b}{\to} +\infty$

- Si *f* est minorée, elle a une limite réelle en *a* (qui est $\inf(f)$)

Sinon, $f \underset{a}{\to} -\infty$

- Si *f* est décroissante : à adapter.

Démonstration :

- Cas où *f* est croissante, étude en *b* :
- Si *f* est majorée, on peut introduire $l = \sup_{x\in]a,b[}(f(x))$.

Montrons qu'alors $f \underset{b}{\to} l$

Soit $\varepsilon > 0$. $l - \varepsilon$ ne majore pas *f*. Il existe donc $x_0 \in]a,b[$ tel que $f(x_0) > l - \varepsilon$. Comme *f* est croissante, on a : $\forall x \in [x_0, b[, l - \varepsilon < f(x) \leq l$.

Or, $[x_0, b[$ est l'intersection d'un voisinage de *b* et de $]a,b[$.

Il existe donc $U \in V(b)$ tel que $\forall x \in D \cap U, f(x) \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$, d'où la limite.

- Si *f* n'est pas majorée :

Montrons que $f \underset{b}{\to} +\infty$

Soit $A \in \mathbb{R}$. A ne majore pas *f*. il existe donc $x_0 \in]a,b[$ tel que $f(x_0) > A$

Comme *f* est croissante, on a : $\forall x \in [x_0, b[, f(x) \geq f(x_0) > A$.

Or, $[x_0, b[$ est l'intersection d'un voisinage de *b* et de $]a,b[$.

Il existe donc $U \in V(b)$ tel que $\forall x \in D \cap U, f(x) > A$

Pour l'étude en *a* :

On peut refaire la démonstration, ou considérer $g : \begin{array}{l}]-b,-a[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto -f(-x) \end{array}$, qui est croissante

- Cas où *f* est décroissante :

Démonstration analogue, ou considérer la fonction $g : \begin{array}{l}]a,b[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto -f(x) \end{array}$, qui est croissante.

Théorème :

Soit I un intervalle infini (c'est-à-dire ni vide ni un singleton) de $\mathbb{R}$, soit $f : I \to \mathbb{R}$, monotone. Alors, en tout point $x_0 \in \mathring{I}$, f admet une limite finie à droite et une limite finie à gauche, avec de plus :

$\lim_{x \mapsto x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \mapsto x_0^+} f(x)$ si f est croissante,

$\lim_{x \mapsto x_0^+} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \mapsto x_0^-} f(x)$ si f est décroissante.

De plus, si a et b désignent les extrémités (dans $\overline{\mathbb{R}}$) de I avec $a < b$, alors :

Si $b \in I$, f a une limite finie à gauche en b et $\lim_{x \mapsto b^-} f(x) \leq f(b)$ si f est croissante,

$\lim_{x \mapsto b^-} f(x) \geq f(b)$ si f est décroissante.

Si $b \notin I$, f a une limite (à gauche) en b dans $\overline{\mathbb{R}}$.

De même en a (à droite)

Démonstration :

Soit $x_0 \in \mathring{I}$. On peut trouver $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_0 < x_2$ (car $x_0 \in \mathring{I}$)

On applique le théorème de la limite monotone à $f_{/]x_1, x_0[}$, qui est monotone et minorée/majorée par $f(x_0)$ (si f est décroissante/croissante)

Donc $\lim_{x \mapsto x_0^-} f(x)$ existe, et est supérieur/inférieur à $f(x_0)$.

De même, on applique le théorème pour $f_{/]x_0, x_2[}$, monotone et majorée/minorée par $f(x_0)$ (si f est décroissante/croissante)

Donc $\lim_{x \mapsto x_0^+} f(x)$ existe et est inférieur/supérieur à $f(x_0)$.

Pour les extrémités :

Si $b \in I$ on applique le théorème à $f_{/]a,b[}$, croissante/décroissante, majorée/minorée par $f(b)$. Sinon, on applique le théorème à $f_{/]a,b[}$, croissante/décroissante.

De même en a.