



# Chapitre 7 : Limite en un point (pour une fonction réelle d'une variable réelle)

Dans tout ce chapitre,  $D$  désigne une partie non vide de  $\mathbb{R}$ .

## I Généralités

### A) Définition

**Définition :**

Soit  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ , soit  $a \in \text{Adh}_{\mathbb{R}}(D)$ .

Soit  $l \in \bar{\mathbb{R}}$ .

On dit que  $f$  tend vers  $l$  en  $a$  – ou que  $f(x)$  tend vers  $l$  lorsque  $x$  tend vers  $a$  – et on note  $f \xrightarrow{a} l$  – ou  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$  – lorsque  $\forall W \in V(l), \exists V \in V(a), f(V \cap D) \subset W$ .

**Variantes de définition dans des cas particuliers :**

- Si  $a \in \mathbb{R}, l \in \mathbb{R}$  :

$$f \xrightarrow{a} l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, (|x - a| < \alpha \implies |f(x) - l| < \varepsilon) \quad (7.1)$$

**Démonstration :**

$\implies$  supposons que  $f \xrightarrow{a} l$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ ; on note  $W = ]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$ .

Alors  $W$  est un voisinage de  $l$ . Il existe donc  $V \in V(a)$  tel que  $f(V \cap D) \subset W$ .

Mais  $V$  contient une boule ouverte de centre  $a$ .

Il existe donc  $\alpha > 0$  tel que  $]a - \alpha, a + \alpha[ \subset V$ .

Donc  $\forall x \in D, \underbrace{|x - a| < \alpha}_{x \in ]a - \alpha, a + \alpha[ \subset V} \implies \underbrace{|f(x) - l| < \varepsilon}_{f(x) \in ]l - \varepsilon, l + \varepsilon[ = W}$ . D'où la première implication.

$\impliedby$  supposons que  $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, (|x - a| < \alpha \implies |f(x) - l| < \varepsilon)$ .

Soit  $W \in V(l)$ . Soit alors  $\varepsilon > 0$  tel que  $]l - \varepsilon, l + \varepsilon[ \subset W$ .

Il existe donc  $\alpha > 0$  tel que  $\forall x \in D, (|x - a| < \alpha \implies |f(x) - l| < \varepsilon)$ .

On pose  $V = ]a - \alpha, a + \alpha[$ .

Alors  $V \in V(a)$ , et on a  $f(V \cap D) \subset ]l - \varepsilon, l + \varepsilon[ \subset W$ .

- Si  $a \in \mathbb{R}, l = +\infty$  :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, (|x - a| < \alpha \implies f(x) > A) \quad (7.2)$$

(même démonstration, en utilisant des voisinages de  $+\infty$ )

- Si  $a = +\infty, l \in \mathbb{R}$  :

$$f \xrightarrow{a} l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in D, (x > A \implies |f(x) - l| < \varepsilon) \quad (7.3)$$

- Si  $a = +\infty, l = +\infty$  :

$$f \xrightarrow{a} l \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in D, (x > B \implies f(x) > A) \quad (7.4)$$

**Cas particulier ( $D = \mathbb{N}$ ) :**

Soit  $a \in \text{Adh}_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}), l \in \mathbb{R}$  :

$$f \xrightarrow{a} l \iff \forall W \in V(l), \exists U \in V(a), \forall n \in \mathbb{N}, (n \in U \implies f(n) \in W) \quad (7.5)$$

Dans le cas  $a = +\infty, U \in V(+\infty) \iff \exists N \in \mathbb{N}, ]N, +\infty[ \subset U$

$$f(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \iff \forall W \in V(l), \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \implies f(n) \in W) \quad (7.6)$$

Le cas  $a = n_0 \in \mathbb{N}$  est sans intérêt...

## B) Théorème (unicité de la limite éventuelle)

**Théorème :**

Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , soit  $a \in \text{Adh}_{\mathbb{R}}(D)$ , soient  $l, l' \in \bar{\mathbb{R}}$ .

Si  $f \xrightarrow{a} l$  et  $f \xrightarrow{a} l'$ , alors  $l = l'$ .

**Démonstration :**

Supposons  $l \neq l'$ .

Il existe donc  $W \in V(l)$  et  $W' \in V(l')$  tels que  $W \cap W' = \emptyset$ .

Alors :

D'une part, il existe  $U \in V(a)$  tel que  $f(U \cap D) \subset W$ .

D'autre part, il existe  $U' \in V(a)$  tel que  $f(U' \cap D) \subset W'$ .

Alors  $\forall x \in U \cap U' \cap D, f(x) \in W \cap W'$ .

Contradiction car  $U \cap U' \cap D \neq \emptyset$ . En effet :

$U \cap U' \in V(a)$ , car  $U \in V(a), U' \in V(a)$ .

De plus,  $\forall V \in V(a), V \cap D \neq \emptyset$ , puisque  $a \in \text{Adh}_{\mathbb{R}}(D)$ .

Donc en particulier  $U \cap U' \cap D \neq \emptyset$ .

D'où l'unicité de la limite.

**Notation :**

Si  $f \xrightarrow{a} l$ , on note  $l = \lim_a f$

Et si  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$ , on note  $l = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

## C) Remarque

**Remarque :**

Si  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \text{Adh}_{\mathbb{R}}(D)$  et si  $f \xrightarrow{a} l$ , alors  $l \in \text{Adh}_{\mathbb{R}}(f(D))$ .

En effet : tout voisinage de  $l$  rencontre  $f(D)$ , puisque si  $W \in V(l)$ , on peut trouver  $U \in V(a)$  tel que  $f(U \cap D) \subset W$ , et comme  $U \cap D \neq \emptyset$ , pour  $x \in U \cap D$ , on a bien  $f(x) \in W$ .

### D) Continuité en un point

**Théorème :**

Soit  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ , et soit  $a \in D$ .

Si  $f$  admet une limite en  $a$ , alors cette limite est  $f(a)$

**Démonstration :**

Supposons que  $f \xrightarrow{a} l$ , avec  $l \neq f(a)$ .

On peut alors trouver  $W \in V(l)$  tel que  $f(a) \notin W$ .

Or, il existe  $U \in V(a)$  tel que  $f(U \cap D) \subset W$  (car  $f \xrightarrow{a} l$  et  $W \in V(l)$ ), ce qui est contradictoire, car  $a \in U \cap D$ . Donc  $f(a) = l$ .

On dit alors que  $f$  est continue en  $a$ .

### E) Exemples

#### 1) Fonction constante

Soit  $K \in \mathbb{R}$ . Soit  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  .  

$$x \mapsto K$$

Alors  $\forall a \in \text{Adh}_{\mathbb{R}}(D), f \xrightarrow{a} K$

**Démonstration :**

Soit  $W \in V(K)$ , prenons  $U = \mathbb{R}$ .

Alors  $U \in V(a)$  et on a bien  $f(U \cap D) \subset W$ .

#### 2) Identité

Soit  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  .  

$$x \mapsto x$$

Alors  $\forall a \in \text{Adh}_{\mathbb{R}}(D), f \xrightarrow{a} a$ .

**Démonstration :**

Soit  $W \in V(a)$ . Prenons alors  $U = W$ .

Alors  $U \in V(a)$  et  $f(U \cap D) \subset W$ .

## II Théorème de « composition » de limites

### A) Théorème

**Théorème :**

Soit  $f: D \rightarrow \mathbb{R}, g: E \rightarrow \mathbb{R}$  où  $E$  est une partie de  $\mathbb{R}$  telle que  $f(D) \subset E$ .

Soit  $a \in \text{Adh}_{\mathbb{R}}(D), b \in \bar{\mathbb{R}}, l \in \bar{\mathbb{R}}$ .

Si  $f$  tend vers  $b$  en  $a$  et si  $g$  tend vers  $l$  en  $b$ , alors  $g \circ f$  tend vers  $l$  en  $a$ .

**Démonstration :**

Déjà, si  $f \xrightarrow{a} b$ , alors  $b \in \text{Adh}_{\mathbb{R}}(f(D))$ , donc  $b \in \text{Adh}_{\mathbb{R}}(E)$ .

Montrons que  $g \circ f \xrightarrow{a} l$ . Soit  $W \in V(l)$ .

Comme  $g \xrightarrow{b} l$ , il existe  $V \in V(b)$  tel que  $g(V \cap E) \subset W$ .

Comme  $f \xrightarrow{a} b$ , il existe  $U \in V(a)$  tel que  $f(U \cap D) \subset V$ .

Alors  $g \circ f(U \cap D) \subset W$  :

Si  $x \in U \cap D$ , alors  $f(x) \in V$ . De plus,  $f(x) \in f(D) \subset E$ .

Donc  $f(x) \in V \cap E$ . Donc  $g \circ f(x) \in W$ .

Donc  $\forall W \in V(l), \exists U \in V(a), g \circ f(U \cap D) \subset W$ .

**B) Cas particulier (suites)**

Soient  $f: D \rightarrow \mathbb{R}, (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in D^{\mathbb{N}}, a \in \text{Adh}_{\mathbb{R}}(D)$ .

Si  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$ , et si  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$ , alors  $f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$ .

**C) Réciproque****Théorème :**

Soit  $f: D \rightarrow \mathbb{R}, a \in \text{Adh}_{\mathbb{R}}(D), l \in \bar{\mathbb{R}}$ .

Si, pour toute suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in D^{\mathbb{N}}$  qui tend vers  $a$ ,  $f(u_n)$  tend vers  $l$ , alors  $f$  tend vers  $l$  en  $a$ .

**Démonstration :**

Montrons la contraposée :

Supposons que  $\text{non}(f \xrightarrow{a} l)$ ,

C'est-à-dire que  $\text{non}(\forall W \in V(l), \exists U \in V(a), f(U \cap D) \subset W)$

Ou :  $\exists W \in V(l), \forall U \in V(a), \exists x \in U \cap D, f(x) \notin W$

Soit  $W$  un tel voisinage. Pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , posons :

$$U_n = \begin{cases} ]a - \frac{1}{n+1}, a + \frac{1}{n+1}[ & \text{si } a \in \mathbb{R} \\ ]n, +\infty[ & \text{si } a = +\infty \\ ]-\infty, -n[ & \text{si } a = -\infty \end{cases} \quad (7.7)$$

Alors  $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in V(a)$ .

Il existe donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_n \in U_n \cap D$  tel que  $f(x_n) \notin W$

Donc  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}}$ , tend vers  $a$  et  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  ne tend pas vers  $l$ .

En effet :

- $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in D$  par construction.
- Si  $a \in \mathbb{R}$  :  $\forall n \in \mathbb{N}, a - \frac{1}{n+1} < x_n < a + \frac{1}{n+1}$   
 Si  $a = +\infty$  :  $\forall n \in \mathbb{N}, x_n > n$   
 Si  $a = -\infty$  :  $\forall n \in \mathbb{N}, x_n < -n$   
 Ainsi, dans les trois cas,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow a$
- $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \notin W$

Donc  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  ne tend pas vers  $l$ . On a donc trouvé une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}}$  qui tend vers  $a$  et telle que  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  ne tend pas vers  $l$ , d'où la démonstration de la contraposée.

### III Limite selon une partie

#### A) Généralités

Soit  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ , soit  $a \in \text{Adh}_{\mathbb{R}}(D)$ ,  $l \in \bar{\mathbb{R}}$ .

Soit  $X$  une partie non vide de  $D$ . Si  $a \in \text{Adh}_{\mathbb{R}}(X)$ , et si  $f|_X$  tend vers  $l$  en  $a$ , on dit que  $f(x)$  tend vers  $l$  quand  $x$  tend vers  $a$  selon  $X$ , et on note :  $f(x) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow a \\ x \in X}]{} l$ .

#### **Proposition :**

Si  $f \xrightarrow{a} l$ , alors  $f|_X \xrightarrow{a} l$  (si  $a \in \text{Adh}_{\mathbb{R}}(X)$ )

#### **Démonstration :**

Supposons que  $f \xrightarrow{a} l$ . Soit  $W \in V(l)$ . Il existe donc  $U \in V(a)$  tel que  $f(U \cap D) \subset W$ . Comme  $X \subset D$ , on a bien alors  $f(U \cap X) \subset f(U \cap D) \subset W$ , soit  $f|_X(U \cap X) \subset W$ , d'où le résultat.

#### B) Cas particulier

Lorsque  $X = U \cap V$  :

Soient  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \text{Adh}_{\mathbb{R}}(D)$ ,  $V \in V(a)$ ,  $l \in \bar{\mathbb{R}}$ .

Alors  $a \in \text{Adh}_{\mathbb{R}}(D \cap V)$ , et :  $f \xrightarrow{a} l \iff f|_{V \cap D} \xrightarrow{a} l$ .

On dit que la notion de limite est locale.

#### **Démonstration :**

$\Rightarrow$  : vu dans la proposition précédente

$\Leftarrow$  : supposons que  $f|_{V \cap D} \xrightarrow{a} l$ .

Soit  $W \in V(l)$ . Il existe  $U \in V(a)$  tel que  $f(U \cap (V \cap D)) \subset W$ .

Si on prend  $U' = V \cap U$ , alors  $U' \in V(a)$  et  $f(U' \cap D) \subset W$ .

#### C) Autre cas particulier

Soient  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \text{Adh}_{\mathbb{R}}(D)$  (Attention ! ici,  $a \in \mathbb{R}$ ).

- Si  $a$  est adhérent à  $D \cap ]a, +\infty[$ , et si  $f|_{D \cap ]a, +\infty[}$  a une limite  $l$  en  $a$ , on dit que  $f$  a une limite à droite en  $a$ , notée  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ , ou  $\lim_{a^+} f$ .
- On adapte pour la limite à gauche.

Si  $a \in D$ , et  $a$  est adhérent à  $D \cap ]a, +\infty[$  et à  $D \cap ]-\infty, a[$ , alors  $f$  a une limite en  $a$  si et seulement si  $f$  a une limite à droite et à gauche en  $a$ , égales toutes les deux à  $f(a)$ .

Si  $a \notin D$ , mais est adhérent à  $D \cap ]a, +\infty[$  et à  $D \cap ]-\infty, a[$ ,  $f$  a une limite en  $a$  si et seulement si  $f$  a une limite à droite et à gauche en  $a$  et si elles sont égales.

**Remarque :**

Si  $D = ]a, +\infty[$ , la notion de  $\lim_{a^+} f$  et  $\lim_a f$  se confond.

Si  $D = [a, +\infty[$ ,  $f$  a une limite en  $a$  si et seulement si  $f$  a une limite à droite égale à  $f(a)$ .

On fait de même pour  $] - \infty, a[$ .

**Définition :**

Soit  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ , soit  $a \in D$ . Alors :

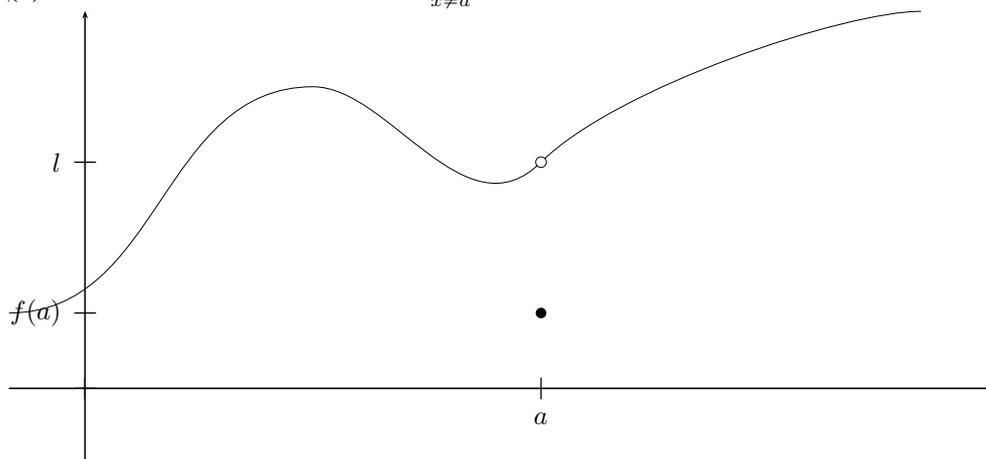
$$\begin{aligned} f \text{ est continue à droite en } a &\iff f|_{D \cap [a, +\infty[} \text{ est continue en } a \\ &\iff f \text{ a une limite à droite en } a \text{ égale à } f(a) \end{aligned} \quad (7.8)$$

De même à gauche.

**D) Autre cas particulier utile**

Soit  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ , soit  $a \in D$  adhérent à  $D \setminus \{a\}$  (c'est-à-dire que tout voisinage de  $a$  contient au moins un point autre que  $a$ , soit que  $a$  n'est pas un point isolé).

Si  $f|_{D \setminus \{a\}}$  a une limite en  $a$ , on la note  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f(x)$ .



Sur le dessin :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f(x) = l \neq f(a) \quad (7.9)$$

Mais  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  n'existe pas.

**Proposition :**

Si  $a$  est adhérent à  $D \setminus \{a\}$ , alors :

$$f \text{ a une limite en } a \iff \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f(x) \text{ existe et vaut } f(a). \quad (7.10)$$

**E) Prolongement par continuité en un point****Définition :**

Soit  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que  $a$  est adhérent à  $D$  (dans  $\mathbb{R}$ ), mais que  $a \notin D$ .

Soit  $g: D \cup \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $g$  est un prolongement par continuité de  $f$  en  $a$  lorsque :

- $\forall x \in D, g(x) = f(x)$
- $g$  est continue en  $a$ .

**Proposition :**

$f$  admet un prolongement par continuité en  $a$  si et seulement si  $f$  admet une limite finie en  $a$ . Dans ce cas, l'unique prolongement par continuité de  $f$  en  $a$  est la fonction :

$$g: D \cup \{a\} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (7.11)$$

$$x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) & \text{si } x = a \end{cases}$$

**IV Limites et inégalités****Proposition :**

Soient  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \text{Adh}_{\mathbb{R}}(D)$ .

Si  $f$  a une limite finie en  $a$ , alors  $f$  est bornée au voisinage de  $a$ .

Si  $f$  tend vers  $+\infty$  en  $a$ , alors  $f$  est non(majorée au voisinage de  $a$ ).

Si  $f$  tend vers  $-\infty$  en  $a$ , alors  $f$  est non(minorée au voisinage de  $a$ ).

(Rappel :  $f$  a la propriété  $\mathcal{P}$  au voisinage de  $a$  s'il existe un voisinage  $U$  de  $a$  tel que  $f|_{D \cap U}$  ait la propriété  $\mathcal{P}$ )

En effet : • Si  $\lim_a f$  existe, vaut  $l \in \mathbb{R}$  alors, selon la définition de limite, il existe  $U \in V(a)$  tel que  $\forall x \in D \cap U, f(x) \in ]l - 1, l + 1[$ . Donc  $f$  est bornée sur  $D \cap U$ .

- Si  $f \xrightarrow{a} +\infty$ . Montrons que  $\forall U \in V(a), f|_{D \cap U}$  n'est pas majorée.

Soit  $U \in V(a)$ . Supposons qu'il existe  $M \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall x \in D \cap U, f(x) \leq M$ .

Mais, selon la définition de limite, il existe  $V \in V(a)$  tel que  $\forall x \in V \cap U, f(x) > M$ , ce qui est contradictoire, puisque  $D \cap U \cap V$  n'est pas vide (car  $a$  est adhérent à  $D$ , donc tout voisinage de  $a$  rencontre  $D$ , et de plus  $U$  et  $V$  sont des voisinages de  $a$ )

- Adapter si  $f \xrightarrow{a} -\infty$ .

**Proposition :**

Soient  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \text{Adh}_{\mathbb{R}}(D)$ .

Si  $f$  tend vers  $l \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$  en  $a$ , alors  $f > 0$  au voisinage de  $a$ .

Si  $f$  tend vers  $l \in \mathbb{R}_-^* \cup \{-\infty\}$  en  $a$ , alors  $f < 0$  au voisinage de  $a$ .

**Démonstration :**

Dans le premier cas, et  $l \in \mathbb{R}_+^*$

On pose  $W = B(l, \frac{l}{2})$  (ainsi,  $\forall x \in W, x > 0$ ).

Il existe alors  $V \in V(a)$  tel que  $f(V \cap D) \subset W$ .

Donc  $\forall x \in V \cap D, f(x) \in W$ , soit  $\forall x \in V \cap D, f(x) > 0$ .

Si  $l = +\infty$  : il suffit de prendre  $W = [1; +\infty[$ , et on aura le même résultat.

On fait de la même façon dans le deuxième cas.

**Proposition :**

Soient  $f: D \rightarrow \mathbb{R}, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ . Soit  $a \in \text{Adh}_{\mathbb{R}}(D)$ .

Si  $f \leq g$  et si  $f$  et  $g$  ont des limites en  $a$ , alors  $\lim_a f \leq \lim_a g$ .

On peut se contenter d'un voisinage de  $a$  pour la propriété  $f \leq g$ .

**Démonstration :**

Notons  $l = \lim_a f$  et  $l' = \lim_a g$ , supposons que  $l > l'$ .

On considère le cas où  $l, l' \in \mathbb{R}$ .

Prenons  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $0 < \varepsilon < \frac{l-l'}{2}$ .

Il existe alors  $U \in V(a)$  tel que  $\forall x \in U \cap D, f(x) \in ]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$

Et  $U' \in V(a)$  tel que  $\forall x \in U' \cap D, g(x) \in ]l' - \varepsilon, l' + \varepsilon[$ .

Alors  $U \cap U' \cap D \neq \emptyset$ , et pour  $x \in U \cap U' \cap D, g(x) < l' + \varepsilon < l - \varepsilon < f(x)$ , ce qui est contradictoire.

**Autre démonstration :**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de points de  $D$  qui tend vers  $a$ .

(Il en existe puisque  $a \in \text{Adh}_{\mathbb{R}}(D)$ ).

On a alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}, f(u_n) \leq g(u_n)$ .

Mais, comme  $f$  a une limite en  $a$ , on sait que  $f(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \lim_a f$ ,

Et, comme  $g$  a une limite en  $a, g(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \lim_a g$ .

Donc, selon le théorème de passage à la limite pour les suites,  $\lim_a f \leq \lim_a g$ .

**Théorème (« des gendarmes ») :**

Soient  $f, g, h: D \rightarrow \mathbb{R}$ , soit  $a \in \text{Adh}_{\mathbb{R}}(D)$ .

On suppose que  $\forall x \in D, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ .

Si  $f$  et  $h$  admettent une même limite  $l$  en  $a$ , alors  $g$  tend aussi vers  $l$  en  $a$ .

**Démonstration :**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}}$  qui tend vers  $a$ .

Alors, selon le théorème de composition de limites,  $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow l$  et  $(h(u_n))_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow l$ .

Or,  $\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) \leq g(u_n) \leq h(u_n)$ .

Donc  $(g(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $l$  en  $a$ , d'après le théorème des gendarmes pour les suites.

C'est valable pour toute suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}}$  qui tend vers  $a$ , donc  $g$  tend vers  $l$  en  $a$ .

## V Limites et opérations sur les fonctions

### A) Cas des limites finies

**Proposition :**

Soient  $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \text{Adh}_{\mathbb{R}}(D)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$\text{Si } \begin{cases} f \xrightarrow{a} l \in \mathbb{R} \\ g \xrightarrow{a} l' \in \mathbb{R} \end{cases}, \text{ alors } \begin{cases} f + g \xrightarrow{a} l + l' \\ \lambda f \xrightarrow{a} \lambda l \\ f \times g \xrightarrow{a} l \times l' \end{cases}$$

**Démonstration :**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}}$  qui tend vers  $a$ . Alors  $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow l$ ,  $(g(u_n))_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow l'$ .

Donc par théorème de composition de limites pour les suites,  $(f(u_n) + g(u_n))_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow l + l'$ , c'est-à-dire  $((f + g)(u_n))_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow l + l'$ .

Ce résultat est valable pour toute suite qui tend vers  $a$ . Donc  $f + g \xrightarrow{a} l + l'$ .

On procède de même avec  $\lambda f, f \times g$ .

**Proposition :**

Soit  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \text{Adh}_{\mathbb{R}}(D)$ .

Si  $f \xrightarrow{a} l \in \mathbb{R}$ , alors  $|f| \xrightarrow{a} |l|$ , et, si  $l \neq 0$ ,  $\frac{1}{f}$  est définie au voisinage de  $a$  et  $\frac{1}{f} \xrightarrow{a} \frac{1}{l}$ .

**Démonstration :**

Utiliser les suites comme précédemment (pour dire que  $\frac{1}{f}$  est défini au voisinage de  $a$  lorsque  $l \neq 0$ , il suffit d'utiliser la deuxième proposition vue dans la section précédente).

**Remarque :**

Soit  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \text{Adh}_{\mathbb{R}}(D)$ .

Soit  $l \in \mathbb{R}$ .

On a les équivalences :

$$f \xrightarrow{a} l \iff f - l \xrightarrow{a} 0 \iff |f - l| \xrightarrow{a} 0 \tag{7.12}$$

**Démonstration :**

On a l'équivalence :

$$f \xrightarrow{a} l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists U \in V(a), \forall x \in D \cap U, \underbrace{|f(x) - l|}_{\substack{=|f(x)-l-0| \\ =||f(x)-l|-0|}} < \varepsilon \tag{7.13}$$

En particulier,

$$f \xrightarrow{a} 0 \iff |f| \xrightarrow{a} 0 \tag{7.14}$$

**Proposition :**

Soient  $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \text{Adh}_{\mathbb{R}}(D)$ .

Si  $f \xrightarrow{a} 0$ , et si  $g$  est bornée au voisinage de  $a$ , alors  $fg \xrightarrow{a} 0$

**B) Cas où certaines limites sont infinies**

Soient  $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \text{Adh}_{\mathbb{R}}(D)$ .

- Si  $f \xrightarrow{a} +\infty$ , alors, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  :

$$\lambda f \xrightarrow{a} \begin{cases} +\infty & \text{si } \lambda > 0 \\ 0 & \text{si } \lambda = 0 \\ -\infty & \text{si } \lambda < 0 \end{cases} \quad (7.15)$$

- Si  $f \xrightarrow{a} +\infty$ , et si  $g$  est minorée, alors  $f + g \xrightarrow{a} +\infty$ .
- Si  $f \xrightarrow{a} +\infty$ , et si  $g$  est minorée par  $\alpha > 0$ , alors  $fg \xrightarrow{a} +\infty$ .
- Si  $f \xrightarrow{a} +\infty$ , alors  $\frac{1}{f}$  est définie au voisinage de  $a$  et  $\frac{1}{f} \xrightarrow{a} 0$
- Si  $f \xrightarrow{a} 0$ , et si  $f > 0$  au voisinage de  $a$  (noté  $f \xrightarrow{a} 0^+$ ), alors  $\frac{1}{f} \xrightarrow{a} +\infty$ .

**C) Les indéterminations**

Ce sont les cas où le cours ne permet pas de conclure, car il y a différentes possibilités.

- «  $+\infty - \infty$  »

**Exemple :**

$$x^2 - x \xrightarrow{+\infty} +\infty, x - x^2 \xrightarrow{+\infty} -\infty, x - x \xrightarrow{+\infty} 0, x + 3 - x \xrightarrow{+\infty} 3, x + \sin x - x \text{ pas de limite.}$$

- «  $0 \times \infty$  »

**Exemple :**

$$\frac{1}{x} x^2 \xrightarrow{+\infty} +\infty, \frac{1}{x^2} x \xrightarrow{+\infty} 0, \frac{1}{x} x \xrightarrow{+\infty} 1, \frac{\sin x}{x} x \text{ pas de limite en } +\infty.$$

- «  $1^\infty$  »

si  $f(x) \xrightarrow{a} 1$ ,  $g(x) \xrightarrow{a} +\infty$  :

On s'intéresse à  $F(x) = f(x)^{g(x)}$ .

$$\text{Mais } F(x) = \exp(\underbrace{g(x)}_{\rightarrow +\infty} \underbrace{\ln(f(x))}_{\rightarrow 0}).$$

On est ainsi ramené à une indétermination du type «  $0 \times \infty$  ».

- «  $0^0$  »

Si  $f(x) \rightarrow 0$  et  $f(x) > 0$

Et  $g(x) \rightarrow 0$

$$\text{On s'intéresse à } F(x) = f(x)^{g(x)} = \exp(\underbrace{g(x)}_{\rightarrow 0} \underbrace{\ln(f(x))}_{\rightarrow -\infty})$$

**D) Limites et fonctions usuelles**

- On a vu que  $x \rightarrow 1$  et  $x \rightarrow x$  sont continues en tout point de  $\mathbb{R}$ . Donc toute fonction polynomiale est continue sur  $\mathbb{R}$ . Il en est de même des fractions rationnelles (sur leur domaine de définition).

- La fonction  $\cos$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

En effet :  $\forall x, x' \in \mathbb{R}, \cos x - \cos x' = -2 \sin\left(\frac{x+x'}{2}\right) \sin\left(\frac{x-x'}{2}\right)$ .

Donc  $\forall x, x' \in \mathbb{R}, |\cos x - \cos x'| \leq 2 \underbrace{\left| \sin\left(\frac{x+x'}{2}\right) \right|}_{\leq 1} \underbrace{\left| \sin\left(\frac{x-x'}{2}\right) \right|}_{\leq \left|\frac{x-x'}{2}\right|} \leq |x-x'|$ .

Donc  $\cos$  est 1-lipschitzienne sur  $\mathbb{R}$ , donc continue.

Montrons que si une fonction  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  est lipschitzienne, alors  $f$  est continue sur  $D$ .

Soit  $k \in \mathbb{R}_+$  tel que  $\forall x, x' \in D, |f(x) - f(x')| \leq k|x-x'|$ .

Soit  $a \in D$ . Alors  $\forall x \in D, |f(x) - f(a)| \leq \underbrace{k|x-a|}_{\rightarrow 0 \text{ en } a}$

Donc  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$ . Donc  $f$  est continue en  $a$ , donc en tout point de  $D$ .

- $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$  Donc, par composition, la fonction  $\sin$  est continue.

- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}, \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ .

Donc la fonction  $\tan$  est continue sur son domaine de définition.

- $\exp, \ln$  sont continues sur leur domaine de définition.

- Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

La fonction  $x \mapsto x^\alpha$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

De plus, si  $\alpha > 0$ , la fonction est prolongeable par continuité en 0 par 0.

- $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ , où  $n \in \mathbb{N}^*$  sont définies et continues sur  $\mathbb{R}_+$

- Les fonctions  $x \mapsto x^n$  pour  $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$  sont définies et continues sur  $\mathbb{R}^*$ .

### E) Remarque technique : « le retour à 0 »

- Pour la limite :

Soit  $f: D \rightarrow \mathbb{R}, a \in \text{Adh}_{\mathbb{R}}(D)$ .

Soit  $l \in \mathbb{R}$ .

$$f \xrightarrow{a} l \iff f - l \xrightarrow{a} 0 \tag{7.16}$$

- Pour la variable : Soit  $f: D \rightarrow \mathbb{R}, a \in \text{Adh}_{\mathbb{R}}(D)$ .

Soit  $l \in \mathbb{R}$ .

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l \iff f(a+u) \xrightarrow{u \rightarrow 0} l \tag{7.17}$$

#### Démonstration :

$\implies$  : supposons que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$ .

Alors  $a+u \xrightarrow{u \rightarrow 0} a$ , et  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$ .

Donc, par composition,  $f(a+u) \xrightarrow{u \rightarrow 0} l$ .

$\impliedby$  : supposons que  $f(a+u) \xrightarrow{u \rightarrow 0} l$ .

Alors  $x-a \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$  et  $f(a+u) \xrightarrow{u \rightarrow 0} l$ .

Donc, par composition,  $f(a+(x-a)) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$ , soit  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$ .

#### Exemple :

Étude de l'éventuelle limite en 3 de  $f(x) = \frac{x^4 - 3^4}{\sin(x) - \sin(3)}$

Domaine de définition :  $\mathbb{R} \setminus (\{3 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - 3 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}) = D$

Donc  $3 \in \text{Adh}_{\mathbb{R}}(D)$

Pour  $u \neq 0$  et suffisamment proche de 0, on a :

$$f(3+u) = \frac{(3+u)^4 - 3^4}{\sin(3+u) - \sin(3)} = \frac{4 \times 3^3 u + 6 \times 3^2 u^2 + 4 \times 3 \times u^3 + u^4}{2 \cos\left(\frac{6+u}{2}\right) \sin\left(\frac{u}{2}\right)} \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \frac{4 \times 3^3 u}{2 \cos(3) \frac{u}{2}} \quad (7.18)$$

Donc  $f(3+u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \frac{4 \times 3^3}{\cos(3)}$ , d'où la limite en 3...

## VI Le théorème de la limite monotone pour les fonctions

### Théorème :

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ , avec  $a < b$

Soit  $f: ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ , monotone. Alors  $f$  a une limite dans  $\mathbb{R}$  en  $a$  et en  $b$ .

Plus précisément :

- Si  $f$  est croissante :
  - ◊ Si  $f$  est majorée, elle a une limite réelle en  $b$  (qui est  $\sup(f)$ )  
Sinon,  $f \xrightarrow{b} +\infty$
  - ◊ Si  $f$  est minorée, elle a une limite réelle en  $a$  (qui est  $\inf(f)$ )  
Sinon,  $f \xrightarrow{a} -\infty$
- Si  $f$  est décroissante : à adapter.

### Démonstration :

- Cas où  $f$  est croissante, étude en  $b$  :
  - ◊ Si  $f$  est majorée, on peut introduire  $l = \sup_{x \in ]a, b[} (f(x))$ . Montrons qu'alors  $f \xrightarrow{b} l$   
Soit  $\varepsilon > 0$ .  $l - \varepsilon$  ne majore pas  $f$ . Il existe donc  $x_0 \in ]a, b[$  tel que  $f(x_0) > l - \varepsilon$ . Comme  $f$  est croissante, on a :  $\forall x \in [x_0, b[, l - \varepsilon < f(x) \leq l$ .  
Or,  $[x_0, b[$  est l'intersection d'un voisinage de  $b$  et de  $]a, b[$ .  
Il existe donc  $U \in V(b)$  tel que  $\forall x \in D \cap U, f(x) \in ]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$ , d'où la limite.
  - ◊ Si  $f$  n'est pas majorée :  
Montrons que  $f \xrightarrow{b} +\infty$   
Soit  $A \in \mathbb{R}$ .  $A$  ne majore pas  $f$ . il existe donc  $x_0 \in ]a, b[$  tel que  $f(x_0) > A$   
Comme  $f$  est croissante, on a :  $\forall x \in [x_0, b[, f(x) \geq f(x_0) > A$ .  
Or,  $[x_0, b[$  est l'intersection d'un voisinage de  $b$  et de  $]a, b[$ .  
Il existe donc  $U \in V(b)$  tel que  $\forall x \in D \cap U, f(x) > A$   
Pour l'étude en  $a$  :  
On peut refaire la démonstration, ou considérer  $g: ]-b, -a[ \rightarrow \mathbb{R}$ , qui est croissante.  
$$\begin{array}{l} g: ]-b, -a[ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -f(-x) \end{array}$$
- Cas où  $f$  est décroissante :  
Démonstration analogue, ou considérer la fonction  $g: ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ , qui est croissante.  
$$\begin{array}{l} g: ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -f(x) \end{array}$$

**Théorème :**

Soit  $I$  un intervalle infini (c'est-à-dire ni vide ni un singleton) de  $\mathbb{R}$ , soit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , monotone. Alors, en tout point  $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ ,  $f$  admet une limite finie à droite et une limite finie à gauche, avec de plus :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \text{ si } f \text{ est croissante,} \quad (7.19)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \text{ si } f \text{ est décroissante.} \quad (7.20)$$

De plus, si  $a$  et  $b$  désignent les extrémités (dans  $\overline{\mathbb{R}}$ ) de  $I$  avec  $a < b$ , alors :

Si  $b \in I$ ,  $f$  a une limite finie à gauche en  $b$  et  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \leq f(b)$  si  $f$  est croissante,

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \geq f(b) \text{ si } f \text{ est décroissante.}$$

Si  $b \notin I$ ,  $f$  a une limite (à gauche) en  $b$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$ .

De même en  $a$  (à droite)

**Démonstration :**

Soit  $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ . On peut trouver  $x_1, x_2 \in I$  tels que  $x_1 < x_0 < x_2$  (car  $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ )

On applique le théorème de la limite monotone à  $f|_{]x_1, x_0[}$ , qui est monotone et minorée/majorée par  $f(x_0)$  (si  $f$  est décroissante/croissante)

Donc  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  existe, et est supérieur/inférieur à  $f(x_0)$ .

De même, on applique le théorème pour  $f|_{]x_0, x_2[}$ , monotone et majorée/minorée par  $f(x_0)$  (si  $f$  est décroissante/croissante)

Donc  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  existe et est inférieur/supérieur à  $f(x_0)$ .

Pour les extrémités :

Si  $b \in I$  on applique le théorème à  $f|_{]a, b[}$ , croissante/décroissante, majorée/minorée par  $f(b)$ . Sinon, on applique le théorème à  $f|_{]a, b[}$ , croissante/décroissante.

De même en  $a$ .