Chapitre 8 : Fonctions continues

I désigne ici un intervalle infini de $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire ni vide ni réduit à un singleton)
D désigne une partie non vide de $\mathbb{R}$.

I Généralités

A) Rappel de définition

Soit $f : D \to \mathbb{R}$

Soit $x_0 \in D$.

- f continue en x_0 $\Leftrightarrow$ f a une limite finie en x_0 (qui est alors $f(x_0)$)

$$\Leftrightarrow f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow f(x_0+h) \xrightarrow[h \to 0]{} f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, (|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

- On dit que f est continue (sur D) lorsque f est continue en tout point x_0 de D, c'est-à-dire :

$$\forall x_0 \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, (|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

B) Opération sur les fonctions continues

1) Restriction

Définition, proposition :

Soit $f : D \to \mathbb{R}$, soit $D' \subset D$ non vide.

On dit que f est continue sur D' lorsque $f_{/D'}$ est continue.

Si f est continue sur D, alors elle est continue sur D'.

En effet :

(1) f est continue (sur D)

$$\Leftrightarrow \forall x_0 \in \underline{\underline{D}}, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \underline{\underline{D}}, (|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

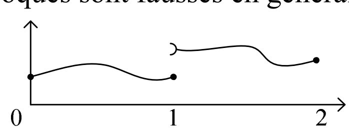
(2) f est continue en tout point de D'

$$\Leftrightarrow \forall x_0 \in \underline{\underline{D'}}, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \underline{\underline{D}}, (|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

(3) f est continue sur D'

$$\Leftrightarrow \forall x_0 \in \underline{\underline{D'}}, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \underline{\underline{D'}}, (|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

Il est alors évident logiquement que $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$ mais que les réciproques sont fausses en général.



Sur l'exemple :

- f n'est pas continue sur le segment $[0;2]$

- f n'est pas continue en tout point de $[0;1]$ (puisqu'elle ne l'est pas en 1)
- $f_{/[0;1]}$ est continue : f est continue sur $[0;1]$

Remarque :

f continue sur A et f continue sur $B \not\Rightarrow f$ est continue sur $A \cup B$

Pour éviter toute ambiguïté de langage, ne pas dire f est continue sur $[0;1]$, mais plutôt $f_{/[0;1]}$ est continue.

Remarque :

Si f est continue sur $[a,b]$ et sur $[b,c]$ ($a < b < c$), alors f est continue sur $[a,c]$ (si f est définie seulement sur $[a,c]$).

En effet :

- Si $x_0 \in [a,b[$, alors f est continue en x_0, car $[a,b]$ est un voisinage de x_0 intercepté par le domaine de définition, et f restreinte à ce voisinage de x_0 tend vers $f(x_0)$ en x_0. Donc f tend vers $f(x_0)$ en x_0.
- En b : f est continue à droite et à gauche, donc f est continue en b.
- Pour $x_0 \in]b,c]$, on fait la même chose que le premier point.

2) Sommes, produits…

Théorème :

- La somme de deux fonctions continues est continue.
- Le produit d'une fonction continue par un réel est continu.
- Le produit de deux fonctions continues est continu.
- L'inverse, lorsqu'il est défini, d'une fonction continue est continu.

Démonstration (pour le quatrième) :

Soit $f : D \to \mathbb{R}$, continue. On suppose que $\frac{1}{f}$ est définie (c'est-à-dire que f ne s'annule pas). Soit $x_0 \in D$. Alors $f(x) \xrightarrow[x \mapsto x_0]{} f(x_0)$. Comme $f(x_0) \neq 0$, on a bien $\frac{1}{f(x)} \xrightarrow[x \mapsto x_0]{} \frac{1}{f(x_0)}$. Ceci est vrai pour tout $x_0 \in D$, d'où la continuité de $\frac{1}{f}$ sur D.

On fait la même chose pour les autres parties du théorème.

3) Composition

Théorème :

La composée, quand elle est définie, de deux fonctions continues est une fonction continue.

Démonstration :

Soient $f : D \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$, continues.

On suppose que $f(D) \subset E$, ainsi $g \circ f$ est définie sur D.

Soit $x_0 \in D$. Alors $f(x) \xrightarrow[x \mapsto x_0]{} f(x_0)$, et $g(u) \xrightarrow[u \mapsto f(x_0)]{} g(f(x_0))$, car $f(x_0) \in E$ et g est continue en $f(x_0)$. Donc $g(f(x)) \xrightarrow[x \mapsto x_0]{} g(f(x_0))$.

4) Autres…

Si f est continue sur D, alors $|f|$ est continue sur D. De plus, f^+ et f^- sont continues sur D.

Démonstration :

Pour $|f|$: C'est la composée de fonctions continues.

Pour f^+ : $\forall x \in D, f^+(x) = \max(f(x),0) = \frac{1}{2}(f(x) + |f(x)|)$, donc f^+ est la somme, produit par un réel et composition de fonctions continues, donc est continue.

Pour f^- : $\forall x \in D, f^-(x) = \max(-f(x),0) = \frac{1}{2}(-f(x) + |f(x)|)$, idem que pour f^+.

C) Fonctions usuelles

Les fonctions polynomiales, rationnelles, du type $x \mapsto x^\alpha$, cosinus, sinus, tangente, exponentielle, logarithme, valeurs absolues sont continues sur leur domaine de définition. (vu chapitre précédent)

D) Notation

Soit I un intervalle. L'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ est noté $C^0(I,\mathbb{R})$. Un élément de $C^0(I,\mathbb{R})$ est dit de classe C^0 sur I (lire « C zéro »).

II Le théorème des valeurs intermédiaires (T.V.I.)

Théorème 1 :

Soit $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, $a < b$ une fonction continue.

Soit d une valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$ (c'est-à-dire que $f(a) \leq d \leq f(b)$ ou $f(b) \leq d \leq f(a)$. Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $d = f(c)$.

Théorème 2 (variante) :

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Démonstration :

- Montrons déjà l'équivalence entre les deux théorèmes :
  - Supposons 1 établi :

  Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et f continue sur I. Montrons que $f(I)$ est in intervalle.

Soient $\alpha, \beta \in f(I)$. Montrons que tout réel *d* entre α et β est dans $f(I)$.

α s'écrit $f(a)$, avec $a \in I$

β s'écrit $f(b)$, avec $b \in I$.

Soit *d* entre α et β

On peut supposer $a \leq b$ (sinon on échange α et β).

$a \in I$ et $b \in I$. Donc $[a,b] \subset I$ car *I* est un intervalle.

f est continue sur *I*, donc *f* est continue sur $[a,b]$.

Donc *d* s'écrit $f(c)$, où $c \in [a,b] \subset I$ (puisqu'on a supposé 1 établi).

Donc $d \in f(I)$.

Donc tout réel entre deux éléments de $f(I)$ est élément de $f(I)$.

Donc $f(I)$ est un intervalle (de $\mathbb{R}$).

- Supposons 2 établi.

Soit $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, continue. Alors $f([a,b])$ est un intervalle (puisque $[a,b]$ en est un). Donc tout réel qui est entre deux réels de $f([a,b])$ est aussi dans $f([a,b])$, c'est-à-dire que tout réel s'écrit $f(c)$, où $c \in [a,b]$.

- Démonstration du théorème 1 :

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, tels que $a < b$. Soit $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, continue.

Soit *d* entre $f(a)$ et $f(b)$.

- Si $f(a) \leq f(b)$, alors $f(a) \leq d \leq f(b)$.

  Donc $f(a) - d \leq 0 \leq f(b) - d$.

  On note alors $g : \begin{array}{l} [a,b] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) - d \end{array}$.

  Alors *g* est continue sur $[a,b]$, et $g(a) \leq 0 \leq g(b)$.

  On s'est donc ramené à montrer l'existence de $c \in [a,b]$ tel que $g(c) = 0$

- Si $f(a) \geq f(b)$, on notera $g : \begin{array}{l} [a,b] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto d - f(x) \end{array}$, et on aura la même chose à montrer.

Maintenant :

On construit par dichotomie deux suites (a_n) et (b_n) telles que :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$

- pour tout $n \in \mathbb{N}$:

Si $g\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) \leq 0$, on pose $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$,

Et sinon $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$.

Alors, du fait de la construction dichotomique des deux suites :

$(1) \forall n \in \mathbb{N}, a \leq a_n \leq b_n \leq b$

$(2) (a_n)$ est croissante, (b_n) décroissante

$(3) \forall n \in \mathbb{N}, b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$

Et de plus, une récurrence immédiate montre que $(4) \forall n \in \mathbb{N}, g(a_n) \leq 0$ et $g(b_n) \geq 0$.

Soit $\forall n \in \mathbb{N}, g(a_n) \leq 0 \leq g(b_n)$.

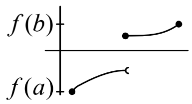
Les suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes. Elle convergent vers une même limite *c*.

Le passage à la limite dans (1) donne : $a \leq c \leq b$, soit que $c \in [a,b]$.

Le passage à la limite dans (4), sachant que g est continue (en c en particulier), donne $g(c) \leq 0 \leq g(c)$, soit $g(c) = 0$, d'où l'existence du réel cherché, et le théorème.

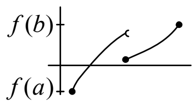
Remarques :

Le théorème est faux en général quand f n'est pas continue :



Le théorème des valeurs intermédiaires donne l'existence d'un réel c… mais pas l'unicité, qui est fausse en générale (il suffit de prendre une fonction non monotone pour trouver des contre-exemples).

Il y a des fonctions non continues sur un intervalle I telles que toute valeur entre deux valeurs atteintes soit une valeur atteinte :



Le théorème des valeurs intermédiaires n'est donc pas caractéristique des fonctions continues (c'est-à-dire qu'une fonction vérifiant le théorème n'est pas nécessairement continue).

III Image d'un segment

Théorème :
L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Démonstration :

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, avec $a < b$ une fonction continue. Montrons que $J = f([a,b])$ est un segment.

Déjà, J est un intervalle, puisque $[a,b]$ en est un.

Montrons maintenant que J est fermé et borné.

Soient $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$ ses extrémités. On doit alors montrer que $\alpha, \beta \in J$ (ce qui montrera à la fois le fait que J est fermé et borné)

Montrons le pour β (le raisonnement est le même pour α)

Déjà, $\beta \in \mathrm{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(J)$

Donc β est la limite d'une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de J.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on introduit $x_n \in [a,b]$ tel que $y_n = f(x_n)$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. On en extrait alors une suite $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge.

Soit $l = \lim\limits_{n\mapsto+\infty} x_{\varphi(n)}$. Alors $l \in [a,b]$ (car $\forall n \in \mathbb{N}, a \leq x_{\varphi(n)} \leq b$).

Alors $(y_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, d'une part tend vers β, d'autre part tend vers $f(l)$ car $\forall n \in \mathbb{N}, y_{\varphi(n)} = f(x_{\varphi(n)})$, et f est continue.

Donc $\beta = f(l)$. Donc $\beta \in J$.

De même, $\alpha \in J$.

Donc J est un segment.

Remarque (hors programme) :

On peut plus généralement établir que l'image d'une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}$ par une fonction continue est une partie fermée et bornée (de $\mathbb{R}$).

Vocabulaire : une partie fermée et bornée est un compact.

Conséquence du théorème :

Si f est une fonction continue sur un segment $[a,b]$, alors f est bornée sur ce segment et atteint ses bornes.

Attention, pour une fonction continue :

- l'image d'un intervalle borné n'est pas toujours un intervalle borné :
  Pour $f(x)=\frac{1}{x}$ sur $]0;1[$, on a $f(]0;1[)=]1,+\infty[$.
- L'image d'un intervalle fermé n'est pas toujours un intervalle fermé :
  Pour $f(x)=\frac{1}{x}$ sur $[1,+\infty[$, on a $f([1,+\infty[)=]0;1]$
- L'image d'un ouvert n'est pas toujours un ouvert :
  Pour $f:x\mapsto \sin x$ sur $\mathbb{R}$ (ouvert), on a $f(\mathbb{R})=[-1;1]$
  Ou pour $f:x\mapsto x^2$ sur $]-1;1[$, on a $f(]-1;1[)=[0;1[$
- L'image d'un non borné n'est pas toujours non borné (on reprend $f:x\mapsto \sin x$)
- L'image d'un non intervalle n'est pas toujours un non intervalle :
  Encore $f:x\mapsto \sin x$ sur $[0,\pi]\cup[3\pi,4\pi]$

IV Fonctions continues et strictement monotones sur un intervalle

A) Le théorème

Théorème 1 :

Soit f une fonction continue et strictement croissante sur un intervalle I.

Alors :

(1) f constitue/réalise une bijection de I sur un certain intervalle J.

(2) L'intervalle J est l'intervalle délimité de la manière suivante :

Notons a, b avec $a<b$ les extrémités dans $\overline{\mathbb{R}}$ de I.

Les extrémités de J dans $\overline{\mathbb{R}}$ sont α,β tels que :

- Si $a\in I$, $\alpha=f(a)$ et $\alpha\in J$
- Sinon, $\alpha=\lim\limits_{a} f$ et $\alpha\notin J$

De même pour β

(3) La bijection réciproque $f^{-1}:J\to I$ est continue et strictement croissante sur J

Théorème 2 :

Même théorème que le 1 pour f strictement décroissante (changer α par β, β par α et croissante par décroissante)

Démonstration :

(1) Déjà, f est strictement croissante donc injective.

Donc l'application $\begin{aligned} I &\to f(I) \\ x &\mapsto f(x)\end{aligned}$ est bijective (puisqu'elle est déjà injective, et on a restreint l'ensemble d'arrivée à l'image)

Et selon le théorème des valeurs intermédiaires, $J = f(I)$ est un intervalle, d'où le premier point du théorème.

(2) Si $a \in I$, alors $\forall x \in I, f(a) \leq f(x)$. Donc $f(a)$ est un minorant de $\{f(x), x \in I\} = J$, soit le minimum puisque $a \in I$. Donc $\alpha \in J$ et $\alpha = f(a)$

Si $a \notin I$:

- Si *J* n'est pas minorée, alors $\alpha = -\infty$. Mais dans ce cas, *f* n'est pas minorée, donc $\lim_a f = -\infty = \alpha$ (puisque *f* est strictement croissante)

- Si *J* est minorée, alors $\alpha = \inf(J)$. Mais dans ce cas, *f* est minorée et α n'est autre que $\inf(f) = \lim_a f$ (d'après le théorème de la limite monotone). De plus, $\alpha \notin J$ car sinon on trouverait $x_0 \in I$ tel que $\alpha = f(x_0)$ (par définition de *J*), et on aurait alors $\forall x \in I, f(x_0) \leq f(x)$, d'où $\forall x \in I, x_0 \leq x$ (car si on trouve $x \in I$ tel que $x_0 > x$ on aurait $f(x_0) > f(x)$ puisque f est strictement croissante). Ainsi, I admettrait un minimum (x_0), ce qui contredirait la définition de *a*.

On fait la même chose pour *b*.

(3) f^{-1} est strictement croissante. En effet :

Soient $u, u' \in J$ tels que $u < u'$.

Alors $f^{-1}(u) < f^{-1}(u')$, car sinon $f^{-1}(u) \geq f^{-1}(u')$, et comme *f* est croissante, $f(f^{-1}(u)) \geq f(f^{-1}(u'))$ soit $u \geq u'$ ce qui est impossible.

Montrons que f^{-1} est continue sur *J*.

Soit $u_0 \in J$. Montrons que f^{-1} est continue en u_0, c'est-à-dire que $\lim_{u \mapsto u_0} f^{-1}(u)$ existe et vaut $f^{-1}(u_0) = x_0$, soit que $\forall W \in V(x_0), \exists U \in V(u_0), \forall u \in U \cap J, f^{-1}(u) \in W$.

Soit $W \in V(x_0)$.

1^er cas : $x_0 \in \mathring{I}$. Donc $W \cap I \in V(x_0)$, donc contient un segment $[x_1, x_2]$ avec $x_1 < x_0 < x_2$. On pose $u_1 = f(x_1)$ et $u_2 = f(x_2)$. On a alors :

$u_1 < f(x_0) < u_2$, soit $u_1 < u_0 < u_2$. Ainsi, $[u_1, u_2]$ est un voisinage de u_0, contenu dans *J* car $u_1, u_2 \in J$. Alors, en posant $U = [u_1, u_2]$, on a : $\forall u \in U \cap J, f^{-1}(u) \in W$.

En effet : $U \cap J = U = [u_1, u_2]$. Donc pour u tel que $u_1 \leq u \leq u_2$, on a $f^{-1}(u_1) \leq f^{-1}(u) \leq f^{-1}(u_2)$ (car f^{-1} est croissante). Donc $f^{-1}(u) \in [x_1, x_2] \in W$. D'où la continuité, puisque le résultat est valable en tout $u_0 \in J$.

2^ème cas : si x_0 est une extrémité de *I*, par exemple $x_0 = \max(I)$. Alors $W \cap I$ contient un segment $[x_1, x_0]$ avec $x_1 < x_0$. Posons $u_1 = f(x_1)$. Alors $u_1 < f(x_0)$, c'est-à-dire $u_1 < f(u_0)$. Par conséquent, $U = [u_1, +\infty[$ est un voisinage de u_0.

Alors $\forall u \in U \cap J, f^{-1}(u) \in W$. En effet :

Pour $u \in U \cap J$, on a $u \geq u_1$, donc $f^{-1}(u) \geq f^{-1}(u_1)$ (car f^{-1} est croissante) et $f^{-1}(u) \leq x_0$ car $f^{-1}(u) \in I$ et $x_0 = \max(I)$. Donc $f^{-1}(u) \in [x_1, x_2] \subset W$, donc f^{-1} est continue en u_0.

On a la même chose si x_0 est un autre type d'extrémité de *I*.

Donc f^{-1} est continue sur *J*.

La démonstration du théorème 2 est analogue, ou alors :

Partant de f continue et strictement croissante, appliquer le théorème 1 à $-f$ continue et strictement croissante.

Donc $-f$ réalise une bijection de I sur un intervalle J

Donc f réalise une bijection de I sur $-J$ (c'est-à-dire $\{-y, y\in J\}$, d'où (1) puis (2).

$f^{-1}: -J\to I$ n'est autre que l'application $\begin{array}{l} -J\to I \\ x\mapsto(-f)^{-1}(-x)\end{array}$, d'où (3). En effet :

Pour $x\in -J$, $y\in I$, on a les équivalences :

$y=f^{-1}(x)\Leftrightarrow f(y)=x\Leftrightarrow -f(y)=-x\Leftrightarrow y=(-f)^{-1}(-x)$.

On utilise généralement ce théorème uniquement avec (1) et (2).

Exemple de rédaction :

Soit $f:\begin{array}{l}\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R} \\ x\mapsto x-4\ln x\end{array}$. Montrer que l'équation $f(x)=0$ a exactement deux solutions sur $\mathbb{R}_+^*$.

x	0		4		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	$f(4)$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(4)=4(1-\ln 4)<0$ car $4>e$.

- f est continue et strictement décroissante sur $]0;4]$ et $\lim_0 f=+\infty$. Donc f réalise une bijection de $]0;4]$ sur $]f(4),+\infty]$. Comme $f(4)<0$, $0\in]f(4),+\infty]$, donc a un unique antécédent dans $]0;4]$ par f, c'est-à-dire qu'il existe un unique $x\in]0;4]$ tel que $f(x)=0$.
- De même, f étant continue et strictement croissante sur $[4,+\infty[$, il existe un unique $x'\in[4,+\infty[$ tel que $f(x')=0$.
- Comme $f(4)\neq 0$, $x\in]0;4[$ et $x'\in]4,+\infty[$, soit $x\neq x'$.
- Donc l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions.

Variante :

On montre l'existence d'une valeur avec le théorème des valeurs intermédiaires, puis l'unicité avec la stricte monotonie.

V Continuité uniforme

A) Définition

Soit D une partie de $\mathbb{R}$. Soit $f:D\to\mathbb{R}$. On dit que f est uniformément continue sur D lorsque $\forall\varepsilon>0,\exists\alpha>0,\forall x\in D,\forall x'\in D,(|x-x'|<\alpha\Rightarrow|f(x)-f(x')|<\varepsilon)$

Proposition :

Soit $f:D\to\mathbb{R}$. Si f est uniformément continue sur D, alors f est continue sur D.

Démonstration :
Rappel des définitions :
(1) *f* est uniformément continue sur *D*
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, \forall x' \in D, (|x - x'| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon)$
(2) *f* est continue sur *D*
$\Leftrightarrow \forall x \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x' \in D, (|x - x'| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon)$
alors $(1) \Rightarrow (2)$ est logiquement évident :
Supposons (1) :
Soient $x \in D, \varepsilon > 0$
Selon (1), on peut trouver $\alpha > 0$ tel que :
$\forall u, u' \in D, (|u - u'| < \alpha \Rightarrow |f(u) - f(u')| < \varepsilon)$.
En particulier, avec $u = x$ (et en remplaçant la variable muette u' par x') :
$\forall x' \in D, (|x - x'| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon)$
Donc $\forall x \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x' \in D, (|x - x'| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon)$.

La réciproque est fausse. Exemple :
$x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$, mais elle est continue.
Montrons alors qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :
$\forall \alpha > 0, \exists x, x' \in \mathbb{R}^+, (|x - x'| < \alpha$ et $|f(x) - f(x')| \geq \varepsilon)$
Prenons $\varepsilon = 1$
Soit $\alpha > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < \alpha$
On prend alors $x = n$, $x' = n + \frac{1}{n}$
On a alors $|x - x'| = \frac{1}{n} < \alpha$, mais $|x^2 - x'^2| = \frac{1}{n}(2n + \frac{1}{n}) = 2 + \frac{1}{n^2} \geq \varepsilon$
(on aurait même pu prendre $\varepsilon = 2$)

Proposition :
Si *f* est lipschitzienne sur *D*, alors *f* est uniformément continue sur *D*.

Démonstration :
Soit *f* lipschitzienne sur *D*.
Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x, x' \in D, (|f(x) - f(x')| \leq k|x - x'|)$
Soit $\varepsilon > 0$, posons $\alpha = \frac{\varepsilon}{k}$.
Alors si $|x - x'| < \alpha$, $k|x - x'| < \varepsilon$, c'est-à-dire $|f(x) - f(x')| \leq k|x - x'| < \varepsilon$.

La réciproque est aussi fausse :
$x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne sur $[0;1]$, mais elle y est uniformément continue.

B) Théorème de Heine

Toute fonction continue sur un segment y est uniformément continue.

Démonstration :

Soit $K=[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$, avec $a<b$.

Soit $f:K\to\mathbb{R}$, continue.

Montrons que $\forall\varepsilon>0,\exists\alpha>0,\forall x,x'\in K,(|x-x'|<\alpha\Rightarrow|f(x)-f(x')|<\varepsilon)$.

Supposons que c'est faux, c'est-à-dire qu'il existe $\varepsilon>0$ tel que $\forall\alpha>0,\exists x,x'\in K,(|x-x'|<\alpha$ et $|f(x)-f(x')|\geq\varepsilon)$.

Pour chaque $n\in\mathbb{N}^*$, on peut donc introduire $x_n,x'_n\in K$ tels que $|x_n-x'_n|<\dfrac{1}{n}$ et $|f(x_n)-f(x'_n)|\geq\varepsilon)$.

Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite bornée d'éléments de *K*. D'après le théorème de Bolzano–Weierstrass, on peut donc en extraire une suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui converge vers $l\in\mathbb{R}$.

Or, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $a\leq x_n\leq b$, donc par passage à la limite, $a\leq l\leq b$, c'est-à-dire que $l\in K$.

De plus, la suite $(x_{\varphi(n)}-x'_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$, extraite de $(x_n-x'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, converge vers 0 puisque $(x_n-x'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Donc $x'_{\varphi(n)}=\underbrace{x_{\varphi(n)}}_{\to l}+\underbrace{x'_{\varphi(n)}-x_{\varphi(n)}}_{\to 0}$ tend aussi vers l en $+\infty$.

Or, *f* est continue en *l*, donc $f(x_{\varphi(n)})\to f(l)$ et $f(x'_{\varphi(n)})\to f(l)$.

Donc $f(x_{\varphi(n)})-f(x'_{\varphi(n)})\to 0$.

Contradiction car $|f(x_{\varphi(n)})-f(x'_{\varphi(n)})|\geq\varepsilon$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

soit $\lim\limits_{n\to+\infty}|f(x_{\varphi(n)})-f(x'_{\varphi(n)})|\geq\varepsilon>0$.

Donc *f* est uniformément continue sur $[a,b]$.

VI Exemples de réciproque d'une bijection d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle. Notions sur les constructions de la fonction exponentielle

(1) Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

Soit $f_n:\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^n\end{array}$. On établit alors aisément que :

Si *n* est impair, f_n réalise une bijection continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Si *n* est pair, f_n réalise une bijection continue et strictement croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$.

Pour *n* impair, la fonction réciproque de f_n est définie sur $\mathbb{R}$, continue et strictement croissante. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, l'unique $y\in\mathbb{R}$ tel que $f_n(y)=x$ est noté $\sqrt[n]{x}$

Pour *n* pair, la fonction réciproque est définie sur $\mathbb{R}^+$, continue et strictement croissante. Pour tout $x\in\mathbb{R}^+$, l'unique $y\in\mathbb{R}^+$ tel que $f_n(y)=x$ est aussi noté $\sqrt[n]{x}$.

(2) On vérifie aisément que pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}^*$ et $r\in\mathbb{N}^*$:

$\sqrt[rq]{x^{pr}}=\sqrt[q]{x^p}$. Ainsi, $\sqrt[q]{x^p}$ ne dépend que de $\frac{p}{q}$. On peut donc le noter $x^{p/q}$.

Attention : $x^{p/q}$ n'a de sens que pour $x > 0$. Par exemple :

$\sqrt[6]{(-2)^2} = \sqrt[6]{4} > 0$

$\sqrt[3]{-2} < 0$

On ne peut donc pas les noter $(-2)^{2/6}$ ou $(-2)^{1/3}$

On a ainsi défini x^n pour tous $x > 0$ et $r \in \mathbb{Q}$.

On vérifie aisément que, pour tous $x, x' > 0$, $r, r' \in \mathbb{Q}$:

$x^r x^{r'} = x^{r+r'}$

$x^{-r} = \dfrac{1}{x^r}$

$x^0 = 1$

$(xx')^r = x^r x'^r$

Et que, pour tout $r > 0$, $x \mapsto x^r$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

pour tout $r < 0$, $x \mapsto x^r$ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

(pour $r = 0$, $x \mapsto x^r$ est constante égale à 1)

(3) On admet que :

Pour tout $x > 0$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et toute suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ qui converge vers α, la suite $(x^{r_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel qui ne dépend que de α et pas de la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On note alors $x^\alpha \underset{\text{déf}}{=} \lim\limits_{n\to+\infty} x^{r_n}$ (définition qui reste vraie si $\alpha \in \mathbb{Q}$)

On admet que la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, strictement croissante si $\alpha > 0$, strictement décroissante si $\alpha < 0$.

On montre aussi que, pour tous $x, x' > 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$x^0 = 1$

$x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$

$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$

$x^{-\alpha} = \dfrac{1}{x^\alpha}$

$(xx')^\alpha = x^\alpha x'^\alpha$

On montre aussi que pour $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x\mapsto 0} x^\alpha = 0$ et $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x^\alpha = +\infty$

(4) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On s'intéresse à $x \mapsto a^x$, définie sur $\mathbb{R}$.

On montre que $x \mapsto a^x$ est continue sur $\mathbb{R}$, strictement croissante si $a > 1$, constante si $a = 1$, strictement décroissante si $a < 1$

On a vu que la suite de terme général $u_n = 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + ... + \dfrac{1}{n!}$ converge, vers un réel $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et aussi que $2 < e < 3$.

On admet de plus que $\dfrac{e^x - 1}{x} \xrightarrow[x\mapsto 0]{} 1$. La fonction $x \mapsto e^x$ est appelée la fonction exponentielle, notée $\exp$. Alors $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. (car $e > 2 > 1$).

(5) La fonction exponentielle réalise une bijection continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty]$. Sa réciproque, appelée logarithme népérien, est appelée $\ln$.