Chapitre 8 : Fonctions continues

I désigne ici un intervalle infini de $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire ni vide ni réduit à un singleton).
D désigne une partie non vide de $\mathbb{R}$.

I Généralités

A) Rappel de définition

Définition :

Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$

Soit $x_0 \in D$.

On a les équivalences :

$$\begin{aligned} f \text{ continue en } x_0 &\iff f \text{ a une limite finie en } x_0 (\text{qui est alors } f(x_0)) \\ &\iff f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} f(x_0) \\ &\iff f(x_0+h) \xrightarrow[h\to 0]{} f(x_0) \\ &\iff \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, (|x - x_0| < \alpha \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon) \end{aligned} \tag{8.1}$$

On dit que f est continue (sur D) lorsque f est continue en tout point x_0 de D, c'est-à-dire :

$$\forall x_0 \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, (|x - x_0| < \alpha \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon) \tag{8.2}$$

B) Opération sur les fonctions continues

1) Restriction

Définition, proposition :

Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$, soit $D' \subset D$ non vide.

On dit que f est continue sur D' lorsque $f_{|D'}$ est continue.

Si f est continue sur D, alors elle est continue sur D'.

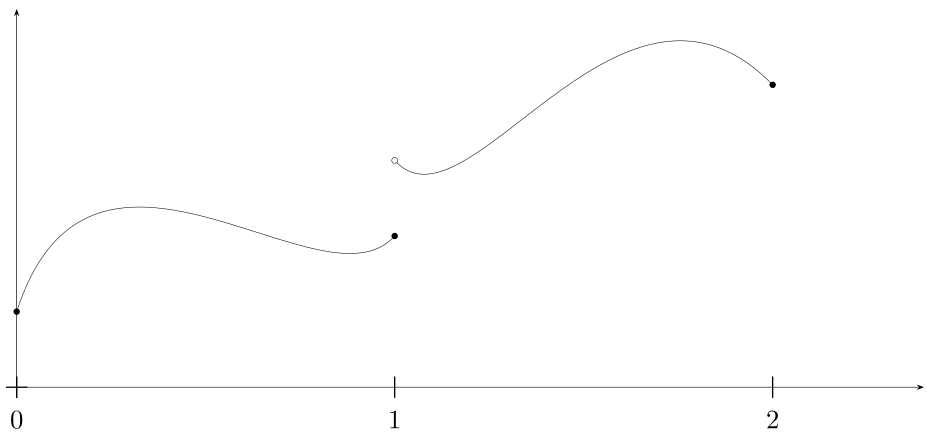
En effet :

$$f \text{ est continue (sur } D) \iff \forall x_0 \in \underline{\underline{D}}, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \underline{\underline{D}}, (|x - x_0| < \alpha \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon) \tag{8.3}$$

$$f \text{ est continue en tout point de } D' \iff \forall x_0 \in \underline{\underline{D'}}, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \underline{\underline{D}}, (|x - x_0| < \alpha \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon) \tag{8.4}$$

$$f \text{ est continue sur } D' \iff \forall x_0 \in \underline{\underline{D'}}, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \underline{\underline{D'}}, (|x - x_0| < \alpha \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon) \tag{8.5}$$

Il est alors évident logiquement que (8.3) $\implies$ (8.4) $\implies$ (8.5) mais que les réciproques sont fausses en général.



Sur l'exemple :

- f n'est pas continue sur le segment $[0, 2]$
- f n'est pas continue en tout point de $[0, 1]$ (puisqu'elle ne l'est pas en 1)
- $f_{|[0,1]}$ est continue : f est continue sur $[0, 1]$

Remarque :
f continue sur A et f continue sur $B \not\Longrightarrow f$ est continue sur $A \cup B$

Lorsque le contexte est ambigü, évitder de dire f est continue sur $[0, 1]$, mais plutôt $f_{|[0,1]}$ est continue.

Remarque :
Si f est continue sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$ $(a < b < c)$, alors f est continue sur $[a, c]$ (si f est définie seulement sur $[a, c]$).

En effet :

- Si $x_0 \in [a, b[$, alors f est continue en x_0, car $[a, b]$ est un voisinage de x_0 intercepté par le domaine de définition, et f restreinte à ce voisinage de x_0 tend vers $f(x_0)$ en x_0. Donc f tend vers $f(x_0)$ en x_0.
- En b : f est continue à droite et à gauche, donc f est continue en b.
- Pour $x_0 \in]b, c]$, on fait la même chose que le premier point.

2) Sommes, produits...

Théorème :

La somme de deux fonctions continues est continue.

Le produit d'une fonction continue par un réel est continu.

Le produit de deux fonctions continues est continu.

L'inverse, lorsqu'il est défini, d'une fonction continue est continu.

Démonstration (pour le quatrième) :

Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$, continue. On suppose que $\frac{1}{f}$ est définie (c'est-à-dire que f ne s'annule pas). Soit $x_0 \in D$. Alors $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} f(x_0)$. Comme $f(x_0) \neq 0$, on a bien $\frac{1}{f(x)} \xrightarrow[x\to x_0]{} \frac{1}{f(x_0)}$. Ceci est vrai pour tout $x_0 \in D$, d'où la continuité de $\frac{1}{f}$ sur D.

On fait la même chose pour les autres parties du théorème.

3) Composition

Théorème :

La composée, quand elle est définie, de deux fonctions continues est une fonction continue.

Démonstration :

Soient $f\colon D \to \mathbb{R}$, $g\colon E \to \mathbb{R}$, continues.

On suppose que $f(D) \subset E$, ainsi $g \circ f$ est définie sur D.

Soit $x_0 \in D$. Alors $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} f(x_0)$, et $g(u) \xrightarrow[u\to f(x_0)]{} g(f(x_0))$, car $f(x_0) \in E$ et g est continue en $f(x_0)$.

Donc $g(f(x)) \xrightarrow[x\to x_0]{} g(f(x_0))$.

4) Autres...

Proposition :

Si f est continue sur D, alors $|f|$ est continue sur D. De plus, f^+ et f^- sont continues sur D.

Démonstration :

Pour $|f|$: C'est la composée de fonctions continues.

Pour f^+ : $\forall x \in D, f^+(x) = \max(f(x), 0) = \frac{1}{2}(f(x) + |f(x)|)$, donc f^+ est la somme, produit par un réel et composition de fonctions continues, donc est continue.

Pour f^- : $\forall x \in D, f^-(x) = \max(-f(x), 0) = \frac{1}{2}(-f(x) + |f(x)|)$, idem que pour f^+.

C) Fonctions usuelles

Les fonctions polynomiales, rationnelles, du type $x \mapsto x^\alpha$, cosinus, sinus, tangente, exponentielle, logarithme, valeurs absolues sont continues sur leur domaine de définition. (vu au chapitre précédent)

D) Notation

Soit I un intervalle. L'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$. Un élément de $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ est dit de classe $\mathcal{C}^0$ sur I (lire « $\mathcal{C}$ zéro »).

II Le théorème des valeurs intermédiaires (T.V.I.)

Théorème :
Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $a < b$ une fonction continue.
Soit d une valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$ (c'est-à-dire que $f(a) \leqslant d \leqslant f(b)$ ou $f(b) \leqslant d \leqslant f(a)$).
Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $d = f(c)$.

Théorème (variante) :
L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Démonstration :

- Montrons déjà l'équivalence entre les deux théorèmes :
  - Supposons le premier établi :
    Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et f continue sur I. Montrons que $f(I)$ est un intervalle.
    Soient $\alpha, \beta \in f(I)$. Montrons que tout réel d entre α et β est dans $f(I)$.
    α s'écrit $f(a)$, avec $a \in I$.
    β s'écrit $f(b)$, avec $b \in I$.
    Soit d entre α et β.
    On peut supposer $a \leqslant b$ (sinon on échange α et β).
    $a \in I$ et $b \in I$. Donc $[a,b] \subset I$ car I est un intervalle.
    f est continue sur I, donc f est continue sur $[a,b]$.
    Donc d s'écrit $f(c)$, où $c \in [a,b] \subset I$ (puisqu'on a supposé le premier théorème établi).
    Donc $d \in f(I)$.
    Donc tout réel entre deux éléments de $f(I)$ est élément de $f(I)$.
    Donc $f(I)$ est un intervalle (de $\mathbb{R}$).
  - Supposons le deuxième théorème établi.
    Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, continue. Alors $f([a,b])$ est un intervalle (puisque $[a,b]$ en est un). Donc tout réel qui est entre deux réels de $f([a,b])$ est aussi dans $f([a,b])$, c'est-à-dire que tout réel s'écrit $f(c)$, où $c \in [a,b]$.
- Démonstration du premier théorème :
  Soient $a, b \in \mathbb{R}$, tels que $a < b$. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, continue.
  Soit d entre $f(a)$ et $f(b)$.
  - Si $f(a) \leqslant f(b)$, alors $f(a) \leqslant d \leqslant f(b)$.
    Donc $f(a) - d \leqslant 0 \leqslant f(b) - d$.
    On note alors $g\colon \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - d \end{array}$.

Alors g est continue sur $[a,b]$, et $g(a) \leqslant 0 \leqslant g(b)$.

On s'est donc ramené à montrer l'existence de $c \in [a,b]$ tel que $g(c) = 0$

- Si $f(a) \geqslant f(b)$, on notera $\begin{array}{rccl} g\colon & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & d - f(x) \end{array}$, et on aura la même chose à montrer.

Maintenant : On construit par dichotomie deux suites (a_n) et (b_n) telles que :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$
- pour tout $n \in \mathbb{N}$:

  Si $g\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \leqslant 0$, on pose $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$,
  Et sinon $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$.

Alors, du fait de la construction dichotomique des deux suites :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, a \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b$
2. (a_n) est croissante, (b_n) décroissante
3. $\forall n \in \mathbb{N}, b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$
4. Et de plus, une récurrence immédiate montre que $\forall n \in \mathbb{N}, g(a_n) \leqslant 0$ et $g(b_n) \geqslant 0$.

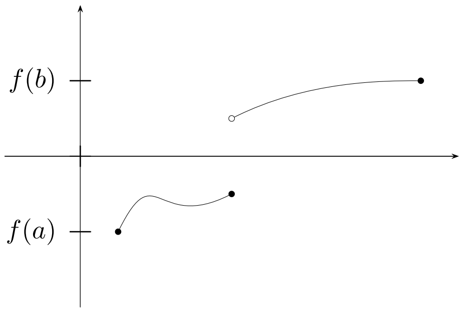
Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, g(a_n) \leqslant 0 \leqslant g(b_n)$.

Les suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes. Elle convergent vers une même limite c. Le passage à la limite dans le prermier point donne : $a \leqslant c \leqslant b$, soit que $c \in [a,b]$.

Le passage à la limite dans le dernier point, sachant que g est continue (en c en particulier), donne $g(c) \leqslant 0 \leqslant g(c)$, soit $g(c) = 0$, d'où l'existence du réel cherché, et le théorème.

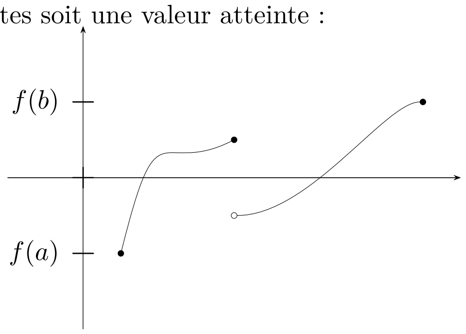
Remarque :

Le théorème est faux en général quand f n'est pas continue :



Le théorème des valeurs intermédiaires donne l'existence d'un réel c...mais pas l'unicité, qui est fausse en générale (il suffit de prendre une fonction non monotone pour trouver des contre-exemples).

Il y a des fonctions non continues sur un intervalle I telles que toute valeur entre deux valeurs atteintes soit une valeur atteinte :



Le théorème des valeurs intermédiaires n'est donc pas caractéristique des fonctions continues (c'est-à-dire qu'une fonction vérifiant le théorème n'est pas nécessairement continue).

III Image d'un segment

Théorème :

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Démonstration :

Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, avec $a < b$, une fonction continue. Montrons que $J = f([a,b])$ est un segment.

Déjà, J est un intervalle, puisque $[a,b]$ en est un.

Montrons maintenant que J est fermé et borné.

Soient $\alpha, \beta \in \bar{\mathbb{R}}$ ses extrémités. On doit alors montrer que $\alpha, \beta \in J$ (ce qui montrera à la fois le fait que J est fermé et borné)

Montrons le pour β (le raisonnement est le même pour α)

Déjà, $\beta \in \mathrm{Adh}_{\bar{\mathbb{R}}}(J)$.

Donc β est la limite d'une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de J.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on introduit $x_n \in [a,b]$ tel que $y_n = f(x_n)$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. On en extrait alors une suite $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge.

Soit $l = \lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)}$. Alors $l \in [a,b]$ (car $\forall n \in \mathbb{N}, a \leqslant x_{\varphi(n)} \leqslant b$).

Alors $(y_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, d'une part tend vers β, d'autre part tend vers $f(l)$ car $\forall n \in \mathbb{N}, y_{\varphi(n)} = f(x_{\varphi(n)})$, et f est continue.

Donc $\beta = f(l)$. Donc $\beta \in J$.

De même, $\alpha \in J$.

Donc J est un segment.

Remarque (hors programme) :

On peut plus généralement établir que l'image d'une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}$ par une fonction continue est une partie fermée et bornée (de $\mathbb{R}$).

Vocabulaire :

Une partie fermée et bornée est un compact.

Conséquence (du théorème) :

Si f est une fonction continue sur un segment $[a,b]$, alors f est bornée sur ce segment et atteint ses bornes.

Attention : pour une fonction continue :

- L'image d'un intervalle borné n'est pas toujours un intervalle borné :
  Pour $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0,1[$, on a $f(]0,1[) =]1,+\infty[$.
- L'image d'un intervalle fermé n'est pas toujours un intervalle fermé :
  Pour $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $[1,+\infty[$, on a $f([1,+\infty[) =]0,1]$
- L'image d'un ouvert n'est pas toujours un ouvert :
  Pour $f\colon x \to \sin x$ sur $\mathbb{R}$ (ouvert), on a $f(R) = [-1,1]$
  Ou pour $f\colon x \to x^2$ sur $]-1,1[$, on a $f(]-1n1[) = [0,1[$
- L'image d'un non borné n'est pas toujours non borné (on reprend $f\colon x \to \sin x$)
- L'image d'un non intervalle n'est pas toujours un non intervalle : Encore $f\colon x \to \sin x$ sur $[0,\pi] \cup [3\pi, 4\pi]$

IV Fonctions continues et strictement monotones sur un intervalle

A) Le théorème

Théorème :
Soit f une fonction continue et strictement croissante sur un intervalle I.
Alors :

1. f constitue/réalise une bijection de I sur un certain intervalle J.
2. L'intervalle J est l'intervalle délimité de la manière suivante :
   Notons a, b avec $a < b$ les extrémités dans $\bar{\mathbb{R}}$ de I.
   Les extrémités de J dans $\bar{\mathbb{R}}$ sont α, β tels que :
   - Si $a \in I$, $\alpha = f(a)$ et $\alpha \in J$
   - Sinon, $\alpha = \lim_a f$ et $\alpha \notin J$

   De même pour β
3. La bijection réciproque $f^{-1} \colon J \to I$ est continue et strictement croissante sur J

Théorème :
Même théorème que le précédent pour f strictement décroissante (changer α par β, β par α et croissante par décroissante)

Démonstration :

1. Déjà, f est strictement croissante donc injective.
   Donc l'application $\begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & f(I) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ est bijective (puisqu'elle est déjà injective, et on a restreint l'ensemble d'arrivée à l'image)
   Et selon le théorème des valeurs intermédiaires, $J = f(I)$ est un intervalle, d'où le premier point du théorème.
2. Si $a \in I$, alors $\forall x \in I, f(a) \leqslant f(x)$. Donc $f(a)$ est un minorant de $\{f(x), x \in I\} = J$, soit le minimum puisque $a \in I$. Donc $\alpha \in J$ et $\alpha = f(a)$
   Si $a \notin I$:
   - Si J n'est pas minorée, alors $\alpha = -\infty$. Mais dans ce cas, f n'est pas minorée, donc $\lim_a f = -\infty = \alpha$ (puisque f est strictement croissante)
   - Si J est minorée, alors $\alpha = \inf(J)$. Mais dans ce cas, f est minorée et α n'est autre que $\inf(f) = \lim_a f$ (d'après le théorème de la limite monotone). De plus, $\alpha \notin J$ car sinon on trouverait $x_0 \in I$ tel que $\alpha = f(x_0)$ (par définition de J), et on aurait alors $\forall x \in I, f(x_0) \leqslant f(x)$, d'où $\forall x \in I, x_0 \leqslant x$ (car si on trouve $x \in I$ tel que $x_0 > x$ on aurait $f(x_0) > f(x)$ puisque f est strictement croissante). Ainsi, I admettrait un minimum (x_0), ce qui contredirait la définition de a.

   On fait la même chose pour b.

3. f^{-1} est strictement croissante. En effet :

   Soient $u, u' \in J$ tels que $u < u'$.

   Alors $f^{-1}(u) < f^{-1}(u')$, car sinon $f^{-1}(u) \geqslant f^{-1}(u')$, et comme f est croissante, $f(f^{-1}(u)) \geqslant f(f^{-1}(u'))$ soit $u \geqslant u'$ ce qui est impossible.

   Montrons que f^{-1} est continue sur J.

   Soit $u_0 \in J$. Montrons que f^{-1} est continue en u_0, c'est-à-dire que $\lim_{u \to u_0} f^{-1}(u)$ existe et vaut $f^{-1}(u_0) = x_0$, soit que $\forall W \in V(x_0), \exists U \in V(u_0), \forall u \in U \cap J, f^{-1}(u) \in W$.

   Soit $W \in V(x_0)$.

   1er cas $x_0 \in \mathring{I}$. Donc $W \cap I \in V(x_0)$, donc contient un segment $[x_1, x_2]$ avec $x_1 < x_0 < x_2$. On pose $u_1 = f(x_1)$ et $u_2 = f(x_2)$. On a alors :

   $u_1 < f(x_0) < u_2$, soit $u_1 < u_0 < u_2$. Ainsi, $[u_1, u_2]$ est un voisinage de u_0, contenu dans J car $u_1, u_2 \in J$. Alors, en posant $U = [u_1, u_2]$, on a : $\forall u \in U \cap J, f^{-1}(u) \in W$.

   En effet : $U \cap J = U = [u_1, u_2]$. Donc pour u tel que $u_1 \leqslant u \leqslant u_2$, on a $f^{-1}(u_1) \leqslant f^{-1}(u) \leqslant f^{-1}(u_2)$ (car f^{-1} est croissante). Donc $f^{-1}(u) \in [x_1, x_2] \in W$. D'où la continuité, puisque le résultat est valable en tout $u_0 \in J$.

   2ème cas si x_0 est une extrémité de I, par exemple $x_0 = \max(I)$. Alors $W \cap I$ contient un segment $[x_1, x_0]$ avec $x_1 < x_0$. Posons $u_1 = f(x_1)$. Alors $u_1 < f(x_0)$, c'est-à-dire $u_1 < f(u_0)$. Par conséquent, $U = [u_1, +\infty[$ est un voisinage de u_0.

   Alors $\forall u \in U \cap J, f^{-1}(u) \in W$. En effet :

   Pour $u \in U \cap J$, on a $u \geqslant u_1$, donc $f^{-1}(u) \geqslant f^{-1}(u_1)$ (car f^{-1} est croissante) et $f^{-1}(u) \leqslant x_0$ car $f^{-1}(u) \in I$ et $x_0 = \max(I)$. Donc $f^{-1}(u) \in [x_1, x_2] \subset W$, donc f^{-1} est continue en u_0.

   On a la même chose si x_0 est un autre type d'extrémité de I.

   Donc f^{-1} est continue sur J.

La démonstration du deuxième théorème est analogue, ou alors :

Démonstration :

Partant de f continue et strictement croissante, appliquer le premier théorème à $-f$ continue et strictement croissante.

Donc $-f$ réalise une bijection de I sur un intervalle J.

Donc f réalise une bijection de I sur $-J$ (c'est-à-dire $\{-y, y \in J\}$), d'où le premier point, puis le deuxième.

$f^{-1}\colon -J \to I$ n'est autre que l'application $\begin{array}{ccc} -J & \longrightarrow & I \\ x & \longmapsto & (-f)^{-1}(-x) \end{array}$, d'où le dernier point. En effet :

Pour $x \in -J$, $y \in I$, on a les équivalences :

$$y = f^{-1}(x) \iff f(y) = x \iff -f(y) = -x \iff y = (-f)^{-1}(-x) \tag{8.6}$$

On utilise généralement ce théorème uniquement avec ses deux premières conclusions.

Exemple de rédaction :

Soit $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - 4\ln x \end{array}$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a exactement deux solutions sur $\mathbb{R}_+^*$.

x	0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(4)$	$\nearrow$	$+\infty$

On a $f(4) = 4(1 - \ln 4) < 0$ car $4 > e$.

- f est continue et strictement décroissante sur $]0, 4]$ et $\lim_0 f = +\infty$. Donc f réalise une bijection de $]0, 4]$ sur $]f(4), +\infty]$. Comme $f(4) < 0$, $0 \in]f(4), +\infty]$, donc a un unique antécédent dans $]0, 4]$ par f, c'est-à-dire qu'il existe un unique $x \in]0, 4]$ tel que $f(x) = 0$.
- De même, f étant continue et strictement croissante sur $[4, +\infty[$, il existe un unique $x' \in [4, +\infty[$ tel que $f(x') = 0$.
- Comme $f(4) \neq 0$, $x \in]0, 4[$ et $x' \in]4, +\infty[$, soit $x \neq x'$.
- Donc l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions.

Variante :

On montre l'existence d'une valeur avec le théorème des valeurs intermédiaires, puis l'unicité avec la stricte monotonie.

V Continuité uniforme

A) Définition

Définition :

Soit D une partie de $\mathbb{R}$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$. On dit que f est uniformément continue sur D lorsque $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, \forall x' \in D, (|x - x'| < \alpha \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon)$

Proposition :

Soit $f : D \to \mathbb{R}$. Si f est uniformément continue sur D, alors f est continue sur D.

Démonstration :

Rappel des définitions :

1. f est uniformément continue sur D

$$\iff \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, \forall x' \in D, (|x - x'| < \alpha \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon) \tag{8.7}$$

2. f est continue sur D

$$\iff \forall x \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x' \in D, (|x - x'| < \alpha \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon) \tag{8.8}$$

alors (1) $\implies$ (2) est logiquement évident :

Supposons (1) :

Soient $x \in D, \varepsilon > 0$

Selon (1), on peut trouver $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall u, u' \in D, (|u - u'| < \alpha \implies |f(u) - f(u')| < \varepsilon) \tag{8.9}$$

En particulier, avec $u = x$ (et en remplaçant la variable muette u' par x') :

$$\forall x' \in D, (|x - x'| < \alpha \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon) \tag{8.10}$$

Donc $\forall x \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x' \in D, (|x - x'| < \alpha \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon)$.

La réciproque est fausse.

Exemple :

$f : x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$, mais elle est continue.

Montrons alors qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall \alpha > 0, \exists x, x' \in \mathbb{R}_+, (|x - x'| < \alpha \text{ et } |f(x) - f(x')| \geqslant \varepsilon) \tag{8.11}$$

Prenons $\varepsilon = 1$

Soit $\alpha > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < \alpha$.

On prend alors $x = n$, $x' = n + \frac{1}{n}$

On a alors $|x - x'| = \frac{1}{n} < \alpha$, mais $|x^2 - x'^2| = \frac{1}{n}(2n + \frac{1}{n}) = 2 + \frac{1}{n^2} \geqslant \varepsilon$. (on aurait même pu prendre $\varepsilon = 2$)

Proposition :

Si f est lipschitzienne sur D, alors f est uniformément continue sur D.

Démonstration :

Soit f lipschitzienne sur D. Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x, x' \in D, (|f(x) - f(x')| \leqslant k|x - x'|)$.

Soit $\varepsilon > 0$, posons $\alpha = \frac{\varepsilon}{k}$.

Alors si $|x - x'| < \alpha$, $k|x - x'| < \varepsilon$, c'est-à-dire $|f(x) - f(x')| \leqslant k|x - x'| < \varepsilon$.

La réciproque est aussi fausse :

$x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne sur $[0, 1]$, mais elle y est uniformément continue.

VI Théorème de Heine

Théorème :

Toute fonction continue sur un segment y est uniformément continue.

Démonstration :

Soit $K = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, avec $a < b$.

Soit $f : K \to \mathbb{R}$, continue.

Montrons que $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, x' \in K, (|x - x'| < \alpha \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon)$.

Supposons que c'est faux, c'est-à-dire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall \alpha > 0, \exists x, x' \in K, (|x - x'| < \alpha$ et $|f(x) - f(x')| \geqslant \varepsilon)$.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on peut donc introduire $x_n, x'_n \in K$ tels que $|x_n - x'_n| < \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(x'_n)| \geqslant \varepsilon)$.

Donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite bornée d'éléments de K. D'après le théorème de Bolzano–Weierstrass, on peut donc en extraire une suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui converge vers $l \in \mathbb{R}$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a \leqslant x_n \leqslant b$, donc par passage à la limite, $a \leqslant l \leqslant b$, c'est-à-dire que $l \in K$.

De plus, la suite $(x_{\varphi(n)} - x'_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$, extraite de $(x_n - x'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, converge vers 0 puisque $(x_n - x'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Donc $x'_{\varphi(n)} = \underbrace{x_{\varphi(n)}}_{\to l} + \underbrace{x'_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}}_{\to 0}$ tend aussi vers l en $+\infty$.

Or, f est continue en l, donc $f(x_{\varphi(n)}) \to f(l)$ et $f(x'_{\varphi(n)}) \to f(l)$.

Donc $f(x_{\varphi(n)}) - f(x'_{\varphi(n)}) \to 0$.
Contradiction car $|f(x_{\varphi(n)}) - f(x'_{\varphi(n)})| \geqslant \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
soit $\lim_{n\to+\infty} |f(x_{\varphi(n)}) - f(x'_{\varphi(n)})| \geqslant \varepsilon > 0$.
Donc f est uniformément continue sur $[a, b]$.

VII Exemples de réciproque d'une bijection d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle. Notions sur les constructions de la fonction exponentielle

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   Soit $f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$. On établit alors aisément que :

   Si n est impair, f_n réalise une bijection continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

   Si n est pair, f_n réalise une bijection continue et strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.

   Pour n impair, la fonction réciproque de f_n est définie sur $\mathbb{R}$, continue et strictement croissante. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'unique $y \in \mathbb{R}$ tel que $f_n(y) = x$ est noté $\sqrt[n]{x}$

   Pour n pair, la fonction réciproque est définie sur $\mathbb{R}_+$, continue et strictement croissante. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, l'unique $y \in \mathbb{R}_+$ tel que $f_n(y) = x$ est aussi noté $\sqrt[n]{x}$.

2. On vérifie aisément que pour tous $x \in \mathbb{R}_+^*$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \mathbb{N}^*$:

   $\sqrt[rq]{x^{pr}} = \sqrt[q]{x^p}$. Ainsi, $\sqrt[q]{x^p}$ ne dépend que de $\frac{p}{q}$. On peut donc le noter $x^{p/q}$.

   Attention : $x^{p/q}$ n'a de sens que pour $x > 0$. Par exemple :

   $$\sqrt[6]{(-2)^2} = \sqrt[6]{4} > 0 \qquad \sqrt[3]{-2} < 0 \tag{8.12}$$

   On ne peut donc pas les noter $(-2)^{2/6}$ ou $(-2)^{1/3}$.

   On a ainsi défini x^r pour tous $x > 0$ et $r \in \mathbb{Q}$.

   On vérifie aisément que, pour tous $x, x' > 0$, $r, r' \in \mathbb{Q}$:

   $$x^r x^{r'} = x^{r+r'} \qquad x^{-r} = \frac{1}{x^r} \qquad x^0 = 1 \qquad (xx')^r = x^r x'^r \tag{8.13}$$

   Et que, pour tout $r > 0$, $x \mapsto x^r$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

   pour tout $r < 0$, $x \mapsto x^r$ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

   (pour $r = 0$, $x \mapsto x^r$ est constante égale à 1)

3. On admet que :

   Pour tout $x > 0$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et toute suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ qui converge vers α, la suite $(x^{r_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel qui ne dépend que de α et pas de la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   On note alors $x^\alpha \underset{\text{déf}}{=} \lim_{n\to+\infty} x^{r_n}$ (définition qui reste vraie si $\alpha \in \mathbb{Q}$)

   On admet que la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, strictement croissante si $\alpha > 0$, strictement décroissante si $\alpha < 0$.

   On montre aussi que, pour tous $x, x' > 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

   $$x^0 = 1 \qquad x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta} \qquad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta} \qquad x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha} \qquad (xx')^\alpha = x^\alpha x'^\alpha \tag{8.14}$$

   On montre aussi que pour $\alpha > 0$, $\lim_{x\to0} x^\alpha = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$

4. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On s'intéresse à $x \mapsto a^x$, définie sur $\mathbb{R}$.

   On montre que $x \mapsto a^x$ est continue sur $\mathbb{R}$, strictement croissante si $a > 1$, constante si $a = 1$, strictement décroissante si $a < 1$

   On a vu que la suite de terme général $u_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ converge, vers un réel $e \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ et aussi que $2 < e < 3$.

   On admet de plus que $\frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$. La fonction $x \mapsto e^x$ est appelée la fonction exponentielle, notée exp. Alors exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. (car $e > 2 > 1$).

5. La fonction exponentielle réalise une bijection continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty]$. Sa réciproque, appelée logarithme népérien, est appelée ln.