

Chapitre 9 : Dérivation

Dans tout ce chapitre, les fonctions sont à valeurs dans \mathbb{R} , définies sur un intervalle de \mathbb{R} .
 I et J désignent des intervalles infinis de \mathbb{R} .

I Dérivabilité en un point

A) Définition

Définition :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, soit $a \in I$. On dit que f est dérivable en a lorsque la fonction $p_a : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ admet une limite finie en a . Cette limite est alors appelée la

$$x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

dérivée de f en a , notée $f'(a)$.

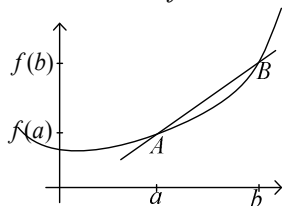
Interprétation :

Notons C la courbe représentative de f dans le repère $\mathfrak{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

Soient $a \in I, b \in I$ avec $a \neq b$.

Soient $A \begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} b \\ f(b) \end{pmatrix}$ (points de C d'abscisses a et b respectivement).

Alors $p_a(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est la pente de la droite (AB) ou encore le taux d'accroissement de f entre a et b .



Si cette pente admet une limite finie quand b tend vers a , on dit que f est dérivable en a , et cette limite est notée $f'(a)$.

La droite passant par A de pente $f'(a)$ est appelée la tangente à C en A / au point d'abscisse a .

Rappels :

Pour $A_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, A_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, la pente de la droite $(A_0 A_1)$ est $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

Equation (dans \mathbb{R}) de la droite passant par A_0 de pente p : $y - y_0 = p \times (x - x_0)$.

Ainsi :

La droite (AB) a pour équation $y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$

La tangente à C en a a pour équation $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

Définition :

(Si a n'est pas un maximum de I)

Si $p_a : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ a une limite finie à droite en a , on dit que f est

$$x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

dérivable à droite en a et cette limite est notée $f'_d(a)$. La tangente à droite est alors la demi-droite d'équation
$$\begin{cases} y - f(a) = f'_d(a)(x - a) \\ x \geq a \end{cases}$$

On a la même définition à gauche lorsque a n'est pas un minimum de I .

Proposition :

Si $a \in \overset{\circ}{I}$, f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en a et si $f'_d(a) = f'_g(a)$.

Et si f est dérivable en a , $f'(a)$ est la valeur commune de $f'_d(a)$ et $f'_g(a)$.

Démonstration :

On sait que :

p_a a une limite en $a \Leftrightarrow p_a$ a une limite à droite et à gauche en a et qui sont égales

Enfin, si $a = \max(I)$, la notion de dérivabilité coïncide avec la notion de dérivée à gauche. De même si $a = \min(I)$.

Extension :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Si p_a admet une limite infinie en a , f n'est pas dérivable en a , cependant on dit que la courbe C admet une tangente verticale en $A \left(\begin{matrix} a \\ f(a) \end{matrix} \right)$.

B) Propriétés

Théorème :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$.

Si f est dérivable en a , alors il existe une fonction $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ (autrement dit ε est nulle et continue en a) (1)
- $\forall x \in I, f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + (x - a)\varepsilon(x)$ (2)

Démonstration :

Soit $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$, définie par :

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases}$$

Alors (2) est vraie (...)

Et on a bien $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$, car $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} f'(a)$.

Vocabulaire :

Ecrire (2), et le fait que $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$, c'est écrire le développement limité à l'ordre 1 de f en a .

Enoncé équivalent (retour à 0) :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, soit $a \in I$.

Si f est dérivable, alors :

Il existe une fonction η , définie sur $V = \{h \in \mathbb{R}, a+h \in I\}$ telle que :

- $\eta(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$
- $\forall h \in V, f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\eta(h)$

Réciproque :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, soit $a \in I$.

S'il existe un réel λ et une fonction $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$ tels que :

$\forall x \in I, f(x) = f(a) + (x-a)\lambda + (x-a)\varepsilon(x)$ et $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$, alors f est dérivable en a et $\lambda = f'(a)$.

Démonstration :

Pour $x \neq a$, $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lambda + \varepsilon(x)$, donc $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda$

(L'existence d'un développement limité à l'ordre 1 en a est équivalente à la dérivabilité en a)

Théorème :

Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .

Démonstration :

Si f est dérivable en a , il existe une fonction ε tel que $\varepsilon \xrightarrow{a} 0$ et

$\forall x \in I, f(x) = f(a) + \underbrace{(x-a)f'(a)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{(x-a)\varepsilon(x)}_{\rightarrow 0}$

Donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$

Remarque :

Les propriétés s'adaptent facilement pour $f|_{I \cap [a, +\infty[}$, d'où les résultats :

- si f est dérivable à droite en a , il existe un développement limité d'ordre 1 à droite en a .
- Si f est dérivable à droite en a , alors f est continue à droite en a .

De même à gauche pour $f|_{I \cap]-\infty, a]}$

C) Opérations sur les fonctions dérivables en un point

Théorème :

Soient f, g deux fonctions de I dans \mathbb{R} , soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soit $a \in I$, on suppose que f et g sont dérivables en a . Alors :

- (1) λf est dérivable en a , et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$
- (2) $f + g$ est dérivable en a et $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

(3) fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

(4) Si $g(a) \neq 0$, $\frac{1}{g}$ est dérivable en a , et $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{(g(a))^2}$

(5) Si $g(a) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ est dérivable en a , et $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$

Démonstration (des points (3) et (4) seulement, les autres en découlant ou étant montrés selon le même principe plus facilement) :

(3) pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} &= \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} \\ &= \frac{g(x)(f(x) - f(a)) + f(a)(g(x) - g(a))}{x - a} \\ &= \underbrace{g(x)}_{\rightarrow g(a)} \underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{\rightarrow f'(a)} + f(a) \underbrace{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}}_{\rightarrow g'(a)} \end{aligned}$$

(4) Déjà, g est continue en a et $g(a) \neq 0$, donc g ne s'annule pas au voisinage de a , donc déjà $\frac{1}{g}$ est bien définie au voisinage de a , disons sur V .

Alors, pour $x \in V \setminus \{a\}$:

$$\frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x) - \left(\frac{1}{g}\right)(a)}{x - a} = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x - a} = \frac{1}{g(a)g(x)} \underbrace{\frac{g(a) - g(x)}{x - a}}_{\rightarrow -g'(a)} = \frac{1}{(g(a))^2} \rightarrow -g'(a)$$

Conséquences :

- Si f_1, f_2, \dots, f_n sont n fonctions de I dans \mathbb{R} dérivables en a , alors $f_1 f_2 \dots f_n$ est dérivable en a et :

$$\begin{aligned} (f_1 f_2 \dots f_n)'(a) &= f_1'(a) f_2(a) \dots f_n(a) + f_1(a) f_2'(a) \dots f_n(a) + \dots + f_1(a) f_2(a) \dots f_n'(a) \\ &= \sum_{i=1}^n f_1(a) f_2(a) \dots f_i'(a) \dots f_n(a) \end{aligned}$$

(Démonstration par récurrence, en utilisant le théorème précédent)

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, si f est dérivable en a , alors f^n est aussi dérivable en a et $(f^n)'(a) = n f'(a) (f(a))^{n-1}$.

(Cas particulier du précédent, ou autre démonstration par récurrence)

Théorème :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, et soit $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ où J est tel que $f(I) \subset J$.

Soit $a \in I$.

Si f est dérivable en a , et si g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a , et $(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$.

Démonstration :

Comme g est dérivable en $f(a)$, il existe $\varepsilon : J \rightarrow \mathbb{R}$ qui tend vers 0 en $f(a)$ telle que $\forall x \in I \setminus \{a\}, g(f(x)) - g(f(a)) = (f(x) - f(a))g'(f(a)) + (f(x) - f(a))\varepsilon(f(x))$.

$$\text{Donc } \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = \underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{\rightarrow f'(a)} g'(f(a)) + \underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{\rightarrow f'(a) \in \mathbb{R}} \underbrace{\varepsilon(f(x))}_{\substack{\rightarrow 0 \text{ car} \\ f(x) \rightarrow f(a) \\ \text{et } \varepsilon(u) \xrightarrow{u \rightarrow f(a)} 0}}$$

Donc $\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} f'(a)g'(f(a))$, d'où la dérivabilité de $g \circ f$ en a et sa valeur.

Théorème :

Soit f continue et strictement monotone sur I .

(Alors f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$, et $f^{-1} : J \rightarrow I$ est continue sur J)

Soit $a \in I$.

Si f est dérivable en a , et si $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$, et on a :

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

(Si f est dérivable en a et que $f'(a) = 0$, f^{-1} n'est pas dérivable en $f(a)$, mais la courbe de f^{-1} présente au point d'abscisse $f(a)$ une tangente verticale).

Autre énoncé du théorème (avec les mêmes hypothèses) :

Soit $b \in J$. Si f est dérivable en $f^{-1}(b)$, et si $f'(f^{-1}(b)) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en b et on a : $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$

Démonstration :

Soit $a \in I$, posons $b = f(a)$.

Supposons f strictement monotone sur I , f dérivable en a , et que $f'(a) \neq 0$.

Soit $x \in J \setminus \{b\}$. Alors :

$$\frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(b)}{x - b} = \frac{f^{-1}(x) - a}{f(f^{-1}(x)) - f(a)}$$

Or, $f^{-1}(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} a$, puisque f^{-1} est continue en b .

Donc par composition, $\frac{f(f^{-1}(x)) - f(a)}{f^{-1}(x) - a} \xrightarrow{x \rightarrow b} f'(a)$.

Donc $\frac{f^{-1}(x) - a}{f(f^{-1}(x)) - f(a)} \xrightarrow{x \rightarrow b} \frac{1}{f'(a)}$ (on a supposé $f'(a) \neq 0$)

C'est-à-dire $\frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(b)}{x - b} \xrightarrow{x \rightarrow b} \frac{1}{f'(a)}$.

Donc $(f^{-1})'(b)$ existe et vaut $\frac{1}{f'(a)}$

II Fonctions dérivées

Définition :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est dérivable (sur I) lorsque f est dérivable en tout point de I . On note alors f' la fonction : $I \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$. f' est appelée la fonction dérivée de f .

On trouve aussi d'autres notations pour $f' : f^{(1)}, \frac{df}{dx}, D(f)$.

Il résulte du **I** les théorèmes suivants :

Théorème :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Si f est dérivable sur I , alors f est continue sur I .

Théorème :

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si f et g sont dérivables, alors :

λf est dérivable, et $(\lambda f)' = \lambda f'$

$f + g$ est dérivable, et $(f + g)' = f' + g'$

fg est dérivable, et $(fg)' = f'g + fg'$

Si g ne s'annule pas, $\frac{1}{g}$ est dérivable, et $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$

Et, toujours si g ne s'annule pas, $\frac{f}{g}$ est dérivable, et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Théorème :

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ où J est tel que $f(I) \subset J$. Si f et g sont dérivables, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $(f \circ g)' = f' \times (g' \circ f)$

Théorème :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Si f est dérivable sur I et strictement monotone sur I , et si f' ne s'annule pas sur I , alors la réciproque f^{-1} de f , définie sur $J = f(I)$, est dérivable sur J et

$\forall x \in J, (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$, autrement dit $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

III Dérivées successives

A) Définition

Définition :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, soit $a \in I$.

Si f est dérivable au voisinage de a (c'est-à-dire sur $]a - \alpha, a + \alpha[\cap I$ où $\alpha > 0$), et si f' est dérivable en a , on dit que f est deux fois dérivable en a et on note $f''(a)$ la valeur de $(f')'(a)$.

Si f est deux fois dérivable en tout point de I , on dit que f est deux fois dérivable (sur I), et on note f'' ou $f^{(2)}$ l'application : $I \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f''(x)$.

Plus généralement, on a la définition récurrente suivante :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, soit $a \in I$.

(1) On note $f^{(0)} = f$

(2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $f^{(n)}$ est définie au voisinage de a , et si $f^{(n)}$ est dérivable en a , on dit que f est $n+1$ fois dérivable en a et on note $f^{(n+1)}(a) = (f^{(n)})'(a)$; si f est $n+1$ dérivable en tout point de I , on dit que f est $n+1$ dérivable sur I , et on note $f^{(n+1)} : I \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f^{(n+1)}(x)$

Autres notations pour $f^{(n)} : \frac{d^n f}{dx^n}$ ou $D^n(f)$ (pour $n \geq 1$)

Définition :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On note $D^n(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions n fois dérivables de I dans \mathbb{R} .

On note $C^n(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions n fois dérivables de I dans \mathbb{R} dont la dérivée n -ième est continue (c'est-à-dire l'ensemble des fonctions de $D^n(I, \mathbb{R})$ qui sont continues)

Une fonction appartenant à $C^n(I, \mathbb{R})$ est dite de classe C^n sur I .

Ainsi,

$C^0(I, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions continues sur I , et $D^0(I, \mathbb{R}) = \mathfrak{F}(I, \mathbb{R})$.

Proposition :

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, et $n \geq 1$. On a les équivalences :

$$f \in D^n(I, \mathbb{R}) \Leftrightarrow f \in D^{n-1}(I, \mathbb{R}) \text{ et } f^{(n-1)} \in D^1(I, \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow f \in D^1(I, \mathbb{R}) \text{ et } f' \in D^{n-1}(I, \mathbb{R})$$

Et lorsque $f \in D^n(I, \mathbb{R})$, on a $f^{(n)} = (f^{(n-1)})' = (f')^{(n-1)}$

Démonstration :

La première équivalence et la première égalité résultent de la définition.

La deuxième équivalence et la deuxième égalité se montrent par récurrence à partir de la première.

Proposition :

Soit $n \geq 1$. On a les inclusions suivantes :

$$C^n(I, \mathbb{R}) \subset D^n(I, \mathbb{R}) \subset C^{n-1}(I, \mathbb{R}) \subset \dots \subset C^0(I, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{F}(I, \mathbb{R}).$$

En effet : la première inclusion résulte de la définition de $C^n(I, \mathbb{R})$ et $D^n(I, \mathbb{R})$.

Pour la deuxième inclusion : si $f \in D^n(I, \mathbb{R})$, alors $f^{(n-1)}$ est définie et dérivable (sur I), donc $f^{(n-1)}$ est définie et continue sur I , donc $f \in C^{n-1}(I, \mathbb{R})$.

Pour les autres inclusions, reprendre l'argument pour continuer...

Remarque : les inclusions sont même strictes, par exemple :

La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dans $D^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, mais pas dans $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$$x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

En effet :

La continuité et la dérivabilité pour $x \neq 0$ ne pose pas de problème. En 0 :

Pour tout $x \neq 0$, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = x \sin \frac{1}{x}$. Or, $x \sin \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

Donc f est dérivable en 0, et $f'(0) = 0$. (donc f est aussi continue en 0)

Donc f est dérivable sur \mathbb{R} , soit $f \in D^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Montrons maintenant que f' n'est pas continue en 0 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \times \frac{-1}{x^2} \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$\text{C'est-à-dire } \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Or, $x \mapsto \cos \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0, donc f' non plus. En effet, supposons que f' a une limite l en 0. Or, $2x \sin \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. Donc $\cos \frac{1}{x} = f'(x) - 2x \sin \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} l$ ce qui est impossible. Donc f' n'a pas de limite en 0, donc f n'est pas continue en 0.

B) Propriétés

Théorème :

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{N}$, soit $a \in I$. On suppose que f et g sont n fois dérivables en a . Alors :

(1) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf est n fois dérivable en a , et $(\lambda f)^{(n)}(a) = \lambda f^{(n)}(a)$

(2) $f + g$ est n fois dérivable en a , et $(f + g)^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) + g^{(n)}(a)$

(3) fg est n fois dérivable en a , et $(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a)$ (Formule de Leibniz).

Démonstration :

(1) et (2) : par récurrence, immédiat.

(3) : Soit I un intervalle.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$, où $P(n)$ signifie :

« pour toutes fonctions f, g définies sur I , pour tout $a \in I$, si f et g sont n fois dérivables en a , alors fg est aussi n fois dérivable en a et on a

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a) \gg$$

Pour $n = 0, n = 1$ on a déjà vu le résultat.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$.

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$. On suppose f et g $n + 1$ fois dérivables en a . Déjà, f et g sont n fois dérivables au voisinage de a , disons sur V .

En appliquant $P(n)$, on obtient :

$$\forall x \in V, (fg)^{(n)}(x) \text{ existe, et } (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x).$$

Mais les fonctions $f^{(k)}$ et $g^{(n-k)}$ ($k \in \llbracket 0, n \rrbracket$) sont toutes définies sur V et dérivables au moins une fois en a .

Donc, selon les théorèmes de dérivabilité en un point et d'opérations sur les fonctions, $(fg)^{(n)}$, définie sur V , est dérivable en a , et la dérivée en a vaut :

$$\begin{aligned} ((fg)^{(n)})'(a) &= \sum_{k=0}^n C_n^k (f^{(k)}(a)g^{(n+1-k)}(a) + f^{(k+1)}(a)g^{(n-k)}(a)) \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)}(a)g^{(n+1-k)}(a) + \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k+1)}(a)g^{((n+1)-(k+1))}(a) \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)}(a)g^{(n+1-k)}(a) + \sum_{k=1}^n C_n^{k-1} f^{(k)}(a)g^{(n+1-k)}(a) \\ &= \underbrace{C_n^0}_{=C_{n+1}^0} f^{(0)}(a)g^{(n+1)}(a) + \sum_{k=1}^n \underbrace{(C_n^k + C_n^{k-1})}_{=C_{n+1}^k} f^{(k)}(a)g^{(n+1-k)}(a) \\ &\quad + \underbrace{C_n^n}_{=C_{n+1}^{n+1}} f^{(n+1)}(a)g^{(0)}(a) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(k)}(a)g^{(n+1-k)}(a) \end{aligned}$$

Comme c'est valable pour tout f, g $n+1$ fois dérivables en a , on a bien $P(n+1)$, ce qui achève la récurrence.

C) Opérations sur les fonctions de classe C^n .

Théorème 1 :

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, et $\lambda \in \mathbb{R}$

Si f et g sont de classe C^n sur I , alors :

- (1) λf et $f + g$ sont de classe C^n
- (2) fg est de classe C^n
- (3) Si f ne s'annule pas sur I , $\frac{1}{f} \in C^n(I, \mathbb{R})$

Théorème 2 :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ où J est tel que $f(I) \subset J$. Si f est de classe C^n , et g est de classe C^n , alors $g \circ f \in C^n(I, \mathbb{R})$.

Théorème 3 :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que f est continue et strictement monotone sur I . Elle réalise donc une bijection de I dans $J = f(I)$.

Si f est de classe C^n , avec $n \geq 1$, et si f' ne s'annule pas sur I , alors f^{-1} est de classe C^n sur J .

Démonstrations :

- Théorème 1 :

(1) Par récurrence :

Pour $n = 0$, ok (la somme de deux fonction continues est continue, idem pour le produit par un scalaire)

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que pour toutes fonctions f et g de classe C^n sur I et tout réel λ , $f + g \in C^n(I, \mathbb{R})$ et $\lambda f \in C^n(I, \mathbb{R})$.

Soient alors f, g de classe C^{n+1} et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors $f + g$ est dérivable (car f et g le sont au moins une fois), et $(f + g)' = f' + g'$.

Or, f' et g' sont de classe C^n , donc $f' + g'$ est de classe C^n (hypothèse de récurrence), soit $(f + g)'$ est de classe C^n . Donc $f + g$ est de classe C^{n+1} sur I

D'autre part, λf est dérivable (même raison), et $(\lambda f)' = \lambda f'$

Or, f' est toujours de classe C^n , donc $\lambda f'$ est de classe C^n , soit $(\lambda f)'$ est de classe C^n , donc λf est de classe C^{n+1} sur I

Ce qui achève la récurrence.

(2) Par récurrence :

Pour $n = 0$, ok (le produit de deux fonctions continues est continu).

Pour $n = 1$: soient $f, g \in C^1(I, \mathbb{R})$.

On sait déjà que $fg \in D^1(I, \mathbb{R})$, et que $(fg)' = f'g + fg'$.

Or, $f'g + fg'$ est continue car f, g, f', g' le sont. Donc $(fg)'$ est de classe C^0 sur I , donc $fg \in C^1(I, \mathbb{R})$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\forall f, g \in C^n(I, \mathbb{R})$, $fg \in C^n(I, \mathbb{R})$

Soient $f, g \in C^{n+1}(I, \mathbb{R})$.

Alors $fg \in D^1(I, \mathbb{R})$ (car f et g sont dérivables), et $(fg)' = f'g + fg'$.

Or, $f, g, f', g' \in C^n(I, \mathbb{R})$. Donc, par hypothèse de récurrence, $f'g, fg' \in C^n(I, \mathbb{R})$.

Donc $f'g + fg' \in C^n(I, \mathbb{R})$. Donc $(fg)' \in C^n(I, \mathbb{R})$, soit $fg \in C^{n+1}(I, \mathbb{R})$

Ce qui achève la récurrence.

(3) Encore par récurrence :

Pour $n = 0$, ok puisque f ne s'annule pas sur I .

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que pour toute fonction f de classe C^n ne s'annulant pas sur I , $\frac{1}{f}$ est de classe C^n .

Soit alors f de classe C^{n+1} sur I , ne s'annulant pas sur I .

Alors $\frac{1}{f}$ est dérivable (car f l'est et ne s'annule pas sur I), et $(\frac{1}{f})' = -\frac{f'}{f^2}$

Or, f' est de classe C^n sur I . De plus, f^2 est aussi de classe C^n , d'après le point précédent, et donc $\frac{1}{f^2}$ aussi par hypothèse de récurrence puisque f^2 ne s'annule pas sur I .

Donc, encore d'après les points précédents, $-f' \times \frac{1}{f^2}$, soit $(\frac{1}{f})'$, est de classe C^n .

Donc $\frac{1}{f}$ est de classe C^{n+1} .

Ce qui achève la récurrence.

- Théorème 2 : par récurrence.

Pour $n = 0$, ok (la composée de deux fonctions continues, quand elle est définie, est continue)

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que pour tout f de classe C^n sur I , pour tout g de classe C^n sur J tel que $f(I) \subset J$, $g \circ f$ est de classe C^n .

Soient alors $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ où J est tel que $f(I) \subset J$ de classe C^{n+1} .

Alors, comme f et g sont dérivables, $g \circ f$ est dérivable et $(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$.

Or, f et g' sont de classe C^n (au moins), donc par hypothèse de récurrence $g' \circ f$ est de classe C^n . De plus, f' est aussi de classe C^n .

Donc $(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$ est de classe C^n d'après le point précédent.

Donc $g \circ f$ est de classe C^{n+1} .

Ce qui achève la récurrence.

- Théorème 3 : par récurrence.

Pour $n = 1$:

Pour $f \in C^1(I, \mathbb{R})$ de dérivée ne s'annulant pas (donc strictement monotone puisque cette dérivée est continue), on a vu que f^{-1} est dérivable et que

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}, \text{ qui est continue car } f^{-1} \text{ est continue et } f' \text{ aussi.}$$

Soit $n \geq 1$, supposons que pour toute fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^n de dérivée ne s'annulant pas, f^{-1} est de classe C^n sur J (où $J = f(I)$).

Soit alors $f \in C^{n+1}(I, \mathbb{R})$, de dérivée ne s'annulant pas.

$$\text{Alors } f^{-1} \text{ est dérivable, et } (f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Or, $f^{-1} \in C^n(J, \mathbb{R})$ par hypothèse de récurrence, et $f' \in C^n(I, \mathbb{R})$. Donc d'après le théorème précédent, $(f^{-1})'$ est de classe C^n sur J , donc f^{-1} est de classe C^{n+1} sur J .

D) Fonctions de classe C^∞

Définition :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est de classe C^∞ lorsque f admet sur I des dérivées de tout ordre.

On note $C^\infty(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur I .

$$\text{Ainsi, } C^\infty(I, \mathbb{R}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (D^n(I, \mathbb{R})) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (C^n(I, \mathbb{R})).$$

Justification de la deuxième égalité :

Une première inclusion vient du fait que si $f \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (D^n(I, \mathbb{R}))$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ existe, et est continue puisque $f^{(n+1)}$ existe, donc $f \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (C^n(I, \mathbb{R}))$

L'autre inclusion est immédiate, puisque une fonction de classe C^n est de classe D^n pour tout n .

E) Les fonctions usuelles

- Les fonctions polynomiales, les fonctions rationnelles sont C^∞ sur leur domaine de définition.
- Les fonctions $\sin, \tan, \cos, \cotan, \exp, \ln, x \mapsto a^x (a > 0), x \mapsto \log_a(x) (a > 0)$ sont aussi C^∞ sur leur domaine.
- Les fonctions $x \mapsto x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ sont C^∞ sur \mathbb{R}_+^* .

Et en plus :

Pour $\alpha \in \mathbb{N}$, elles sont C^∞ sur \mathbb{R} .

Pour $\alpha \in \mathbb{Z}$, elles sont C^∞ sur \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^*

Enfin, pour $\alpha \in \mathbb{Q}^+$, elles sont prolongeable en 0, mais non dérivable en 0 en général.

Démonstration :

Par récurrence, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction est de classe C^n (dans la récurrence : supposer la fonction de classe C^{n+1} , sa dérivée est alors de classe C^n , et reconnaître la même fonction/ une autre fonction qu'on sait de classe C^{n+1} ...)