Chapitre 11 : Formules de Taylor

Dans tout ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, et les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{R}$; n désigne un entier naturel.

I Préliminaire

- Soient $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n \in \mathbb{R}$.

Soit $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
$$x \mapsto \lambda_n x^n + \lambda_{n-1} x^{n-1} + ... + \lambda_1 x + \lambda_0 = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k x^k$$

Alors $P \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P^{(0)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k x^k$$

$$P^{(1)}(x) = \sum_{k=1}^{n} k\lambda_k x^{k-1}$$

$$P^{(2)}(x) = n(n-1)\lambda_n x^{n-1} + ... + 2\lambda_2$$

$$P^{(3)}(x) = n(n-1)(n-2)\lambda_n x^{n-3} + ... + 6\lambda_3$$

$\vdots$

$$P^{(n)}(x) = n!\lambda_n$$

Et $P^{(k)}(x) = 0$ pour $k > n$

En 0 :

$$P^{(0)}(x) = \lambda_0$$

$$P^{(1)}(x) = \lambda_1$$

$$P^{(2)}(x) = 2\lambda_2$$

$\vdots$

$$P^{(k)}(x) = k!\lambda_k \text{ pour } 0 \le k \le n$$

- Plus généralement :

Soient $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.

Soit $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$x \mapsto \lambda_n (x-a)^n + \lambda_{n-1}(x-a)^{n-1} + ... + \lambda_1 (x-a) + \lambda_0$$

Alors $P \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$P^{(k)}(x) = n(n-1)(n-2)...(n-k)\lambda_n (x-a)^k + ... + k!\lambda_k$ pour $0 \le k \le n$.

On a les mêmes dérivées en a qu'en 0 dans le premier cas.

- Soit $f : I \to \mathbb{R}$, soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose que f est n fois dérivable en a.

Soit T_n le polynôme de degré $\le n$ dont les dérivées successives jusqu'à la n-ième en a coïncident avec celles de f, c'est-à-dire, d'après le préliminaire pour les dérivées successives de T_n en a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, T_n(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2 \frac{f''(a)}{2!} + ... + (x-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Pour tout $x \in I$, on pose $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$.
Ecrire une formule de Taylor pour *f* à l'ordre *n* en *a*, c'est écrire :
$\forall x \in I, f(x) = T_n(x) + R_n(x)$.
$T_n(x)$ s'appelle la partie polynomiale, $R_n(x)$ le reste.
Le but du chapitre est de donner des théorèmes à propos du reste.

II Inégalité de Taylor–Lagrange

Théorème :
Soit *f* une fonction de classe C^{n+1} sur un segment $\underset{\leftrightarrow}{[a,b]}$. Alors :

$$f(b) = \underbrace{f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)}_{T_n(b)} + R_n(b)\text{, avec}$$

$$\boxed{|R_n(b)| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{\underset{\leftrightarrow}{t \in [a,b]}} \left|f^{(n+1)}(t)\right|}.$$

(La borne sup. est bien définie car $f^{(n+1)}$ est définie et continue sur le segment $\underset{\leftrightarrow}{[a,b]}$)

C'est l'inégalité de Taylor–Lagrange à l'ordre *n* de *f* entre *a* et *b*.

Démonstration :
* Le cas où $a = b$ est trivial.
* Si $a < b$: on va montrer que pour tout $x \in [a,b]$, on a :

$$-\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}M \leq f(x) - f(a) - (x-a)f'(a) - \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) - \ldots - \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) \leq \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}M$$

où $M = \sup_{t \in [a,b]} \left|f^{(n+1)}(t)\right|$, ce qui établira le résultat en prenant $x = b$

- Montrons la deuxième inégalité :

Soit $\varphi :\ [a,b] \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) - f(a) - (x-a)f'(a) - \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) - \ldots - \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) - \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}M$$

C'est-à-dire $\forall x \in [a,b], \varphi(x) = f(x) - T_n(x) - \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}M$

Alors φ est de classe C^{n+1} sur $[a,b]$, et :

$$\forall x \in [a,b], \varphi'(x) = f'(x) - T_n'(x) - \frac{(x-a)^n}{n!}M$$

$$\vdots$$

$$\forall x \in [a,b], \varphi^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - T_n^{(n)}(x) - (x-a)M = f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a) - (x-a)M$$

$$\forall x \in [a,b], \varphi^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - M \leq 0 \text{ car } f^{(n+1)}(x) \leq M.$$

Donc $\varphi^{(n)}$ est décroissante, et $\varphi^{(n)}(a) = 0$. Donc $\forall x \in [a,b], \varphi^{(n)}(x) \leq 0$, donc $\varphi^{(n-1)}$ est décroissante, et $\varphi^{(n-1)}(a) = 0$. Donc… donc φ est décroissante, et $\varphi(a) = 0$, donc $\forall x \in [a,b], \varphi(x) \leq 0$.

Donc $\forall x \in [a,b], f(x) - T_n(x) - \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}M \leq 0$

Et, en particulier : $f(b)-T_n(b)\leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}M$

- Pour la deuxième inégalité :

Soit φ définie par $\forall x\in[a,b], \varphi(x)=f(x)-T_n(x)+\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}M$

Alors $\varphi\in C^{n+1}([a,b],\mathbb{R})$, et :

$\forall x\in[a,b], \varphi'(x)=f'(x)-T_n'(x)+\frac{(x-a)^{n}}{n!}M$

$\vdots$

$\forall x\in[a,b], \varphi^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)+M\geq 0$ car $\left|f^{(n+1)}(x)\right|\leq M$, soit $f^{(n+1)}(x)\geq -M$.

Donc $\varphi^{(n)}$ est croissante, et $\varphi^{(n)}(a)=0$. Donc $\forall x\in[a,b], \varphi^{(n)}(x)\geq 0$, donc $\varphi^{(n-1)}$ est croissante, et $\varphi^{(n-1)}(a)=0$. Donc… donc φ est croissante, et $\varphi(a)=0$, donc $\forall x\in[a,b], \varphi(x)\geq 0$.

Donc $\forall x\in[a,b], f(x)-T_n(x)+\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}M\geq 0$

Donc $f(b)-T_n(b)\geq -\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}M$

- Ainsi, $\left|f(b)-T_n(b)\right|\leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\sup_{t\in[a,b]}\left|f^{(n+1)}(t)\right|$, soit $\left|R_n(b)\right|\leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}\sup_{t\in[a,b]}\left|f^{(n+1)}(t)\right|$.

* Si $a>b$:

Etant donné $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ de classe C^{n+1}, en posant $M=\sup_{t\in[a,b]}\left|f^{(n+1)}(t)\right|$, on introduit $g:\begin{array}{l}[-a,-b]\to\mathbb{R}\\ x\mapsto f(-x)\end{array}$.

Alors g est de classe C^{n+1}, et $\forall k\in[\![0,n+1]\!], \forall x\in[-a,-b]$, $g^{(k)}(x)=(-1)^k f^{(k)}(-x)$.

Le théorème, montré dans le cas précédent, pour g entre $-a$ et $-b$ donne :

$$g(-b)=g(-a)+(-b+a)g'(-a)+\frac{(-b+a)^2}{2!}g''(-a)+\ldots+\frac{(-b+a)^n}{n!}g^{(n)}(-a)+S_n(-b)$$

avec $\left|S_n(-b)\right|\leq \frac{(-b+a)^{n+1}}{(n+1)!}\sup_{t\in[-a,-b]}\left|g^{(n+1)}(t)\right|$.

On a :

$g(-a)=f(a),\quad g(-b)=f(b),$

$(-b+a)g'(-a)=(-b+a)(-1)f'(a)=(b-a)f'(a),$

$(-b+a)^2g''(-a)=(b-a)^2(-1)^2f''(a)=(b-a)^2f''(a)\ldots$

Donc

$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+S_n(-b)$, et :

$$\left|S_n(-b)\right|\leq \underbrace{\frac{(-b+a)^{n+1}}{(n+1)!}}_{=\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}}\underbrace{\sup_{t\in[-a,-b]}\left|g^{(n+1)}(t)\right|}_{=M}$$

Cas particulier : l'inégalité entre 0 et x :

Inégalité de Taylor–Lagrange entre 0 et x pour f de classe C^{n+1} :

Soit I un intervalle contenant 0.

Soit f de classe C^{n+1} sur I.

Alors, pour tout $x \in I$, on peut écrire :

$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + ... + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + R_n(x)$, avec :

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{\substack{t \in [0,x] \\ \leftrightarrow}} |f^{(n+1)}(t)|$$

Exemple :

La fonction exponentielle étant de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, on peut écrire cette inégalité à n'importe quel ordre :

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$, avec $|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{\substack{t \in [0,x] \\ \leftrightarrow}} (e^t)$

III Formule de Taylor–Young

Théorème :

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction de classe C^n sur un intervalle I contenant a.

Alors il existe une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ qui tend vers 0 en a telle que :

$$\forall x \in I, f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + ... + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x)$$

Formule de Taylor–Young à l'ordre n en a pour f de classe C^n.

Autrement dit, au voisinage de a :

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + ... + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + o((x-a)^n)$$

Démonstration :

Soit $n \geq 1$.

Pour $x \in I$, posons :

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^n} \text{ si } x \neq a \\ 0 \text{ si } x = a \end{cases}$$

On a alors déjà l'égalité. Reste à montrer que $\varepsilon(x) \xrightarrow[\substack{x \mapsto a \\ x \neq a}]{} 0$.

Pour cela, on applique l'inégalité de Taylor–Lagrange à l'ordre $n-1$ à la fonction $\varphi : t \mapsto f(t) - T_n(t)$ entre a et x, où x est un élément quelconque de I.

On a alors :

$$\left| \varphi(x) - (\varphi(a) + (x-a)\varphi'(a) + ... + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(a) \right| \leq \frac{|x-a|^n}{n!} \sup_{\substack{t \in [a,x] \\ \leftrightarrow}} |\varphi^{(n)}(t)|$$

Mais $\varphi(a) = \varphi'(a) = ... = \varphi^{(n-1)}(a) = \varphi^{(n)}(a) = 0$, d'après le préliminaire.

De plus, $\forall t \in I, \varphi^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) - \underbrace{T_n^{(n)}(t)}_{= T_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)}$.

Ainsi, $\left|f(x)-T_n(x)\right| \leq \dfrac{|x-a|^n}{n!} \sup\limits_{t\in \underset{\leftrightarrow}{[a,x]}} \left|f^{(n)}(t)-f^{(n)}(a)\right|$.

Donc, pour $x \neq a$:

$$|\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{n!} \sup_{t\in \underset{\leftrightarrow}{[a,x]}} \left|f^{(n)}(t)-f^{(n)}(a)\right|$$

Il reste à montrer que $\sup\limits_{t\in \underset{\leftrightarrow}{[a,x]}} \left|f^{(n)}(t)-f^{(n)}(a)\right| \xrightarrow[x\mapsto a]{} 0$

Déjà, $g : t \mapsto f^{(n)}(t)-f^{(n)}(a)$ est continue sur *I* et nulle en *a*.

* Soit $\eta > 0$.

Comme *g* est continue en *a*, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall t \in I, (|t-a| < \alpha \Rightarrow |g(t)| < \eta/2$.

Alors, pour $x \in I$ tel que $|x-a| < \alpha$, on a : $\forall t \in \underset{\leftrightarrow}{[a,x]}, |g(t)| < \eta/2$

(puisque pour $t \in [a,x], |t-a| \leq |x-a| < \alpha$)

Donc $\forall x \in I, (|x-a| < \alpha \Rightarrow \sup\limits_{t\in \underset{\leftrightarrow}{[a,x]}} |g(t)| \leq \eta/2 < \eta)$

* Autre démonstration :

Pour tout $x \in I$, on a :

La fonction $|g|$ est continue sur le segment $\underset{\leftrightarrow}{[a,x]}$. Donc, sur ce segment, elle est bien bornée, et elle atteint ses bornes. Il existe donc $c_x \in \underset{\leftrightarrow}{[a,x]}$ tel que $\sup\limits_{t\in \underset{\leftrightarrow}{[a,x]}} |g(t)| = |g(c_x)|$.

On a :

$\forall x \in I, |c_x - a| \leq |x-a|$ car $c_x \in \underset{\leftrightarrow}{[a,x]}$.

Donc $c_x \xrightarrow[x\mapsto a]{} a$, et *g* est continue en *a*, donc $g(c_x) \xrightarrow[x\mapsto a]{} \underset{=0}{g(a)}$

D'où $\sup\limits_{t\in \underset{\leftrightarrow}{[a,x]}} |g(t)| \xrightarrow[x\mapsto a]{} 0$.

Dans le cas où $n = 0$:

Le théorème dit :

Si *f* est continue sur *I* contenant *a* : $f(x) = f(a) + \varepsilon(x)$ où $\varepsilon \xrightarrow[a]{} 0$, ce qui est vrai.

Cas particulier : Taylor–Young à l'ordre *n* en 0 :

Soit *f* de classe C^n sur *I* contenant 0.

Alors $f(x) = f(0) + xf'(0) + \dfrac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + o(x^n)$.

IV L'égalité de Taylor–Lagrange (hors programme)

Théorème :

Soit *f* de classe C^n sur $[a,b]$ et de classe D^{n+1} sur $]a,b[$ au moins ($a < b$)

Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Démonstration :
Soit $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x\in[a,b],\varphi(x)=f(x)+(b-x)f'(x)+\ldots+\frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n)}(x)+\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}A$$

Où A est une constante de sorte que $\varphi(a)=f(b)$, c'est-à-dire :

$$A=\frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}}\left(f(a)-(b-a)f'(a)-\ldots-\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)\right)$$

Alors φ est continue sur $[a,b]$, et dérivable sur $]a,b[$, et $\varphi(a)=\varphi(b)\ (=f(b))$.
Il existe donc $c\in\,]a,b[$ tel que $\varphi'(c)=0$.
Or, pour tout $x\in\,]a,b[$:

$$\varphi'(x)=\underbrace{f'(x)-f'(x)+(b-x)f''(x)-(b-x)f''(x)+\ldots}_{=0}+\frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x)-\frac{(b-x)^n}{n!}A$$

Soit $\varphi'(x)=\dfrac{(b-x)^n}{n!}\left(f^{(n+1)}(x)-A\right)$

Or, $\varphi'(c)=0$ et $c\neq b$, donc $f^{(n+1)}(c)=A$, d'où l'égalité cherchée.

Remarque : de cette égalité, on tire aisément l'inégalité de Taylor–Lagrange.

V Récapitulation, formules à connaître

Rappel des trois théorèmes à l'ordre n en 0 :
Théorème (inégalité de Taylor–Lagrange) :
Soit $f\in C^{n+1}(I,\mathbb{R})$, où I contient 0. Alors, pour tout $x\in I$:

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+R_n(x)\text{, avec :}$$

$$|R_n(x)|\leq\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\sup_{\substack{t\in[0,x]\\ \leftrightarrow}}\left|f^{(n+1)}(t)\right|$$

Théorème (Taylor–Young) :
Soit $f\in C^{n+1}(I,\mathbb{R})$, où I contient 0. Alors, au voisinage de 0 :

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+o(x^n)$$

Théorème (Egalité de Taylor–Lagrange) :
Soit f $n+1$ fois dérivable sur I contenant 0.
Alors, pour tout $x\in I\setminus\{0\}$, il existe $c_x\in\underset{\leftrightarrow}{]0,x[}$ tel que :

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c_x)$$

Formule de Taylor–Young des fonctions usuelles en 0 (de classe C^∞ sur un intervalle contenant 0) :

• $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$ (ordre n)

• $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$ (ordre $2n$)

Et même $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$ (ordre $2n+1$)

• $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$ (ordre $2n+1$)

Et même $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$ (ordre $2n+2$)

• $f_\alpha : x \mapsto (1+x)^\alpha$ est de classe C^∞ sur $]-1,+\infty[$.

$f_\alpha^{(0)}(x) = (1+x)^\alpha$

$f_\alpha^{(1)}(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$

$f_\alpha^{(2)}(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$

$\vdots$

$f_\alpha^{(n)}(x) = \underbrace{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}_{n \text{ termes}}(1+x)^{\alpha-n}$

Donc $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$

Commentaire :

Le cosinus à l'ordre 2 donne :

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$

Donc $\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$

C'est-à-dire $\cos x - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$

Cas particulier avec $\alpha = -1$:

$$\frac{1}{1+x} = \underbrace{1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + ... + (-1)^n x^n}_{= \frac{1-(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1-(-x)}} + \underbrace{o(x^n)}_{\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}}$$

Autre cas particulier : $\alpha = p \in \mathbb{N}$

$$(1+x)^p = \underbrace{1}_{C_0^p} + \underbrace{p}_{C_1^p}x + \underbrace{\frac{p(p-1)}{2!}}_{C_2^p}x^2 + \underbrace{\frac{p(p-1)(p-2)}{3!}}_{C_3^p}x^3 ... + \underbrace{\frac{p(p-1)(p-2)...(p-p+1)}{p!}}_{C_p^p}x^p$$

(Les termes suivants sont nuls)

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2}-1)}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + o(x^n)$$

Avec $a_n = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n}(\frac{1}{2}-k) \times \frac{2}{1-2n}$