Chapitre 10 : Formules de Taylor

Dans tout ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, et les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{R}$; n désigne un entier naturel.

I Préliminaire

- Soient $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$.

  Soit $P\colon \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lambda_n x^n + \lambda_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \lambda_1 x + \lambda_0 = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k x^k \end{array}$.

  Alors $P \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P^{(0)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k x^k \qquad P^{(1)}(x) = \sum_{k=1}^{n} k\lambda_k x^{k-1} \tag{10.1}$$

$$P^{(2)}(x) = n(n-1)\lambda_n x^{n-1} + \cdots + 2\lambda_2 \qquad P^{(3)}(x) = n(n-1)(n-2)\lambda_n x^{n-3} + \cdots + 6\lambda_3 \tag{10.2}$$

$$\dots \qquad P^{(n)}(x) = n!\lambda_n \tag{10.3}$$

  Et $P^{(k)}(x) = 0$ pour $k > n$

  En 0 :

$$P^{(0)}(x) = \lambda_0 \qquad P^{(1)}(x) = \lambda_1 \qquad P^{(2)}(x) = 2\lambda_2 \tag{10.4}$$

$$\dots \qquad P^{(k)}(x) = k!\lambda_k \text{ pour } 0 \leqslant k \leqslant n \tag{10.5}$$

- Plus généralement :

  Soient $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.

  Soit $P\colon \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lambda_n (x-a)^n + \lambda_{n-1}(x-a)^{n-1} + \cdots + \lambda_1 (x-a) + \lambda_0 \end{array}$

  Alors $P \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P^{(k)}(x) = n(n-1)(n-2)\dots(n-k)\lambda_n(x-a)^k + \cdots + k!\lambda_k \text{ pour } 0 \leqslant k \leqslant n \tag{10.6}$$

  On a les mêmes dérivées en a qu'en 0 dans le premier cas.

- Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$, soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose que f est n fois dérivable en a.

  Soit T_n le polynôme de degré $\leqslant n$ dont les dérivées successives jusqu'à la n-ième en a coïncident avec celles de f, c'est-à-dire, d'après le préliminaire pour les dérivées successives de T_n en a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, T_n(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2\frac{f''(a)}{2!} + \cdots + (x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!} \tag{10.7}$$

  Pour tout $x \in I$, on pose $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$.

  Écrire une formule de Taylor pour f à l'ordre n en a, c'est écrire :

$$\forall x \in I, f(x) = T_n(x) + R_n(x) \tag{10.8}$$

  $T_n(x)$ s'appelle la partie polynomiale, $R_n(x)$ le reste.

  Le but du chapitre est de donner des théorèmes à propos du reste.

II Inégalité de Taylor–Lagrange

Théorème :

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un segment $[a, b]$. Alors :

$$f(b) = \underbrace{f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)}_{T_n(b)} + R_n(b), \tag{10.9}$$

avec

$$\boxed{|R_n(b)| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [a,b]} |f^{(n+1)}(t)|} \tag{10.10}$$

(La borne sup. est bien définie car $f^{(n+1)}$ est définie et continue sur le segment $[a, b]$)

C'est l'inégalité de Taylor–Lagrange à l'ordre n de f entre a et b.

Démonstration :

- Le cas où $a = b$ est trivial.
- Si $a < b$: on va montrer que pour tout $x \in [a, b]$, on a :

$$-\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}M \leqslant f(x) - f(a) - (x-a)f'(a) - \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) - \cdots - \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) \leqslant \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}M \tag{10.11}$$

où $M = \sum_{t \in [a,b]} |f^{(n+1)}(t)|$, ce qui établira le résultat en prenant $x = b$

◇ Montrons la deuxième inégalité :

Soit $$\varphi\colon \begin{array}{rcl} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - f(a) - (x-a)f'(a) - \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) - \cdots - \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) - \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}M \end{array}$$

C'est-à-dire $\forall x \in [a, b], \varphi(x) = f(x) - T_n(x) - \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}M$

Alors φ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$, et :

$$\forall x \in [a, b], \varphi'(x) = f'(x) - T_n'(x) - \frac{(x-a)^n}{n!}M \tag{10.12}$$

$$\vdots \tag{10.13}$$

$$\forall x \in [a, b], \varphi^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - T_n^{(n)}(x) - (x-a)M = f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a) - (x-a)M \tag{10.14}$$

$$\forall x \in [a, b], \varphi^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - M \leqslant 0 \text{ car } f^{(n+1)}(x) \leqslant M \tag{10.15}$$

Donc $\varphi^{(n)}$ est décroissante, et $\varphi^{(n)}(a) = 0$. Donc $\forall x \in [a, b], \varphi^{(n)}(x) \leqslant 0$, donc $\varphi^{(n-1)}$ est décroissante, et $\varphi^{(n-1)}(a) = 0$. Donc...donc φ est décroissante, et $\varphi(a) = 0$, donc $\forall x \in [a, b], \varphi(x) \leqslant 0$.

Donc $\forall x \in [a, b], f(x) - T_n(x) - \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}M \leqslant 0$.

Et, en particulier : $f(b) - T_n(b) \leqslant \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}M$

◇ Pour la deuxième inégalité :

Soit φ définie par $\forall x \in [a, b], \varphi(x) = f(x) - T_n(x) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}M$.

Alors $\varphi \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b],\mathbb{R})$, et :

$$\forall x \in [a,b], \varphi'(x) = f'(x) - T_n'(x) + \frac{(x-a)^n}{n!}M \tag{10.16}$$

$$\vdots \tag{10.17}$$

$$\forall x \in [a,b], \varphi^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) + M \geqslant 0 \text{ car } |f^{(n+1)}(x)| \leqslant M, \text{ soit } f^{(n+1)}(x) \geqslant -M. \tag{10.18}$$

Donc $\varphi^{(n)}$ est croissante, et $\varphi^{(n)}(a) = 0$. Donc $\forall x \in [a,b], \varphi^{(n)}(x) \geqslant 0$, donc $\varphi^{(n-1)}$ est croissante, et $\varphi^{(n-1)}(a) = 0$. Donc...donc φ est croissante, et $\varphi(a) = 0$, donc $\forall x \in [a,b], \varphi(x) \geqslant 0$.

Donc $\forall x \in [a,b], f(x) - T_n(x) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}M \geqslant 0$.

Donc $f(b) - T_n(b) \geqslant -\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}M$

◇ Ainsi, $|f(b)-T_n(b)| \leqslant \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\sup_{t\in[a,b]}|f^{(n+1)}(t)|$, soit $|R_n(b)| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}\sup_{t\in[a,b]}|f^{(n+1)}(t)|$.

- Si $a > b$:

  Étant donné $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, en posant $M = \sup_{t\in[a,b]}|f^{(n+1)}(t)|$, on introduit $g\colon \begin{array}{rcl} [-a,-b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(-x) \end{array}$.

  Alors g est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, et $\forall k \in [\![0, n+1]\!], \forall x \in [-a,-b], g^{(k)}(x) = (-1)^k f^{(k)}(-x)$.

  Le théorème, montré dans le cas précédent, pour g entre $-a$ et $-b$ donne :

$$g(-b) = g(-a) + (-b+a)g'(-a) + \frac{(-b+a)^2}{2!}g''(-a) + \cdots + \frac{(-b+a)^n}{n!}g^{(n)}(-a) + S_n(-b) \tag{10.19}$$

  avec $|S_n(-b)| \leqslant \frac{(-b+a)^{n+1}}{(n+1)!}\sup_{t\in[-a,-b]}|g^{(n+1)}(t)|$.

  On a :

$$g(-a) = f(a) \tag{10.20}$$

$$g(-b) = f(b) \tag{10.21}$$

$$(-b+a)g'(-a) = (-b+a)(-1)f'(a) = (b-a)f'(a) \tag{10.22}$$

$$(-b+a)^2 g''(-a) = (b-a)^2(-1)^2 f''(a) = (b-a)^2 f''(a) \tag{10.23}$$

$$\cdots \tag{10.24}$$

  Donc

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + S_n(-b), \tag{10.25}$$

  et

$$|S_n(-b)| \leqslant \underbrace{\frac{(-b+a)^{n+1}}{(n+1)!}}_{=\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}} \underbrace{\sup_{t\in[-a,-b]}|g^{(n+1)}(t)|}_{=M} \tag{10.26}$$

Cas particulier (l'inégalité entre 0 et x) :

Inégalité de Taylor–Lagrange entre 0 et x pour f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$:

Soit I un intervalle contenant 0.

Soit f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I.

Alors, pour tout $x \in I$, on peut écrire :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + R_n(x), \tag{10.27}$$

avec

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in \underset{\leftrightarrow}{[0,x]}} |f^{(n+1)}(t)| \tag{10.28}$$

Exemple :

La fonction exponentielle étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, on peut écrire cette inégalité à n'importe quel ordre :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x) \tag{10.29}$$

avec

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in \underset{\leftrightarrow}{[0,x]}} (e^t) \tag{10.30}$$

III Formule de Taylor–Young

Théorème :

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I contenant a.

Alors il existe une fonction $\varepsilon \colon I \to \mathbb{R}$ qui tend vers 0 en a telle que :

$$\forall x \in I, f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + (x-a)^n\varepsilon(x) \tag{10.31}$$

« Formule de Taylor–Young à l'ordre n en a pour f de classe $\mathcal{C}^n$ ».

Autrement dit, au voisinage de a :

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + o((x-a)^n) \tag{10.32}$$

Démonstration :

Soit $n \geqslant 1$.

Pour $x \in I$, posons :

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-T_n(x)}{(x-a)^n} & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases} \tag{10.33}$$

On a alors déjà l'égalité. Reste à montrer que $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \neq a]{x \to a} 0$.

Pour cela, on applique l'inégalité de Taylor–Lagrange à l'ordre $n-1$ à la fonction $\varphi \colon t \mapsto f(t) - T_n(t)$ entre a et x, où x est un élément quelconque de I.

On a alors :

$$\left|\varphi(x) - \left(\varphi(a) + (x-a)\varphi'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(a)\right)\right| \leqslant \frac{|x-a|^n}{n!} \sup_{t \in \underset{\leftrightarrow}{[a,x]}} |\varphi^{(n)}(t)| \tag{10.34}$$

Mais $\varphi(a) = \varphi'(a) = \cdots = \varphi^{(n-1)}(a) = \varphi^{(n)}(a) = 0$, d'après le préliminaire.

De plus, $\forall t \in I, \varphi^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) - \underbrace{T_n^{(n)}(t)}_{=T_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)}$.

Ainsi, $|f(x) - T_n(x)| \leqslant \frac{|x-a|^n}{n!} \sup_{t \in \underset{\leftrightarrow}{[a,x]}} |f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)|$.

Donc, pour $x \neq a$:

$$|\varepsilon(x)| \leqslant \frac{1}{n!} \sup_{t \in \underset{\leftrightarrow}{[a,x]}} |f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)| \tag{10.35}$$

Il reste à montrer que $\sup_{t\in\underset{\leftrightarrow}{[a,x]}} |f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)| \xrightarrow[x\to a]{} 0$.

Déjà, $g\colon t \mapsto f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)$ est continue sur I et nulle en a.

- Soit $\eta > 0$.

  Comme g est continue en a, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall t \in I, (|t-a| < \alpha \implies |g(t)| < \eta/2)$.

  Alors, pour $x \in I$ tel que $|x-a| < \alpha$, on a : $\forall t \in \underset{\leftrightarrow}{[a,x]}, |g(t)| < \eta/2$

  (puisque pour $t \in [a,x], |t-a| \leqslant |x-a| < \alpha$)

  Donc $\forall x \in I, (|x-a| < \alpha \implies \sup_{t\in\underset{\leftrightarrow}{[a,x]}} |g(t)| \leqslant \eta/2 < \eta)$

- Autre démonstration :

  Pour tout $x \in I$, on a :

  La fonction $|g|$ est continue sur le segment $\underset{\leftrightarrow}{[a,x]}$. Donc, sur ce segment, elle est bien bornée, et elle atteint ses bornes. Il existe donc $c_x \in \underset{\leftrightarrow}{[a,x]}$ tel que $\sup_{t\in\underset{\leftrightarrow}{[a,x]}} |g(t)| = |g(c_x)|$.

  On a :

  $\forall x \in I, |c_x - a| \leqslant |x-a|$ car $c_x \in \underset{\leftrightarrow}{[a,x]}$.

  Donc $c_x \xrightarrow[x\to a]{} a$, et g est continue en a, donc $g(c_x) \xrightarrow[x\to a]{} \underbrace{g(a)}_{=0}$.

  D'où $\sup_{t\in\underset{\leftrightarrow}{[a,x]}} |g(t)| \xrightarrow[x\to a]{} 0$.

Dans le cas où $n = 0$:

Le théorème dit :

Si f est continue sur I contenant a : $f(x) = f(a) + \varepsilon(x)$ où $\varepsilon \xrightarrow[a]{} 0$, ce qui est vrai.

Cas particulier (Taylor–Young à l'ordre n en 0) :

Soit f de classe $\mathcal{C}^n$ sur I contenant 0.

Alors $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + o(x^n)$.

IV L'égalité de Taylor–Lagrange (hors programme)

Théorème :

Soit f de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$ et de classe $\mathcal{D}^{n+1}$ sur $]a,b[$ au moins $(a<b)$

Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c) \tag{10.36}$$

Démonstration :

Soit $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [a,b], \varphi(x) = f(x) + (b-x)f'(x) + \cdots + \frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n)}(x) + \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}A \tag{10.37}$$

Où A est une constante de sorte que $\varphi(a) = f(b)$, c'est-à-dire :

$$A = \frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}}\left(f(a) - (b-a)f'(a) - \cdots - \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)\right) \tag{10.38}$$

Alors φ est continue sur $[a,b]$, et dérivable sur $]a,b[$, et $\varphi(a) = \varphi(b)$ $(= f(b))$.

Il existe donc $c \in]a,b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$.

Or, pour tout $x \in]a, b[$:

$$\varphi'(x) = \underbrace{f'(x) - f'(x) + (b-x)f''(x) - (b-x)f''(x) + \cdots}_{=0} + \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) - \frac{(b-x)^n}{n!} A \qquad (10.39)$$

Soit $\varphi'(x) = \frac{(b-x)^n}{n!}\left(f^{(n+1)}(x) - A\right)$

Or, $\varphi'(c) = 0$ et $c \neq b$, donc $f^{(n+1)}(c) = A$, d'où l'égalité cherchée.

Remarque :

De cette égalité, on tire aisément l'inégalité de Taylor–Lagrange.

V Récapitulation, formules à connaître

Rappel des trois théorèmes à l'ordre n en 0 :

Théorème (inégalité de Taylor–Lagrange) :

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$, où I contient 0. Alors, pour tout $x \in I$:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + R_n(x), \qquad (10.40)$$

avec

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in \overleftrightarrow{[0,x]}} |f^{(n+1)}(t)| \qquad (10.41)$$

Théorème (Taylor–Young) :

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$, où I contient 0. Alors, au voisinage de 0 :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + o(x^n) \qquad (10.42)$$

Théorème (Égalité de Taylor–Lagrange) :

Soit f $n+1$ fois dérivable sur I contenant 0.

Alors, pour tout $x \in I \setminus \{0\}$, il existe $c_x \in \overleftrightarrow{]0, x[}$ tel que :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_x) \qquad (10.43)$$

Formule de Taylor–Young des fonctions usuelles en 0 (de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle contenant 0) :

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$ (ordre n)
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$ (ordre $2n$)
  Et même $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$ (ordre $2n+1$)
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$ (ordre $2n+1$)
  Et même $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$ (ordre $2n+2$)

- $f_\alpha \colon x \mapsto (1+x)^\alpha$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$.

$$f_\alpha^{(0)}(x) = (1+x)^\alpha \qquad f_\alpha^{(1)}(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \tag{10.44}$$

$$f_\alpha^{(2)}(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \qquad \dots \tag{10.45}$$

$$f_\alpha^{(n)}(x) = \underbrace{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}_{n \text{ termes}}(1+x)^{\alpha-n} \tag{10.46}$$

Donc $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$

Commentaire :

Le cosinus à l'ordre 2 donne :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \tag{10.47}$$

Donc $\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$

C'est-à-dire $\cos x - 1 \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$

Cas particulier (avec $\boldsymbol{\alpha = -1}$) :

$$\frac{1}{1+x} = \underbrace{1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots + (-1)^n x^n}_{=\frac{1-(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1-(-x)}} + \underbrace{o(x^n)}_{\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}} \tag{10.48}$$

Cas particulier ($\boldsymbol{\alpha = p} \in \mathbb{N}$) :

On a :

$$(1+x)^p = \underbrace{1}_{C_0^p} + \underbrace{p}_{C_1^p} x + \underbrace{\frac{p(p-1)}{2!}}_{C_2^p} x^2 + \underbrace{\frac{p(p-1)(p-2)}{3!}}_{C_3^p} x^3 \dots + \underbrace{\frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-p+1)}{p!}}_{C_p^p} x^p \tag{10.49}$$

(Les termes suivants sont nuls)

$$\begin{aligned}(1+x)^{1/2} &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2}-1)}{2}x^2 + o(x^2) \\ &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + o(x^n)\end{aligned} \tag{10.50}$$

Avec $a_n = \frac{1}{n!}\left(\prod_{k=0}^{n} \frac{1}{2} - k\right) \times \frac{2}{1-2n}$