# Chapitre 7 : Rapides compléments sur $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$

## I Sur $\mathbb{Z}$

- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$, lois $+$, $\times$, relation d'ordre $\leqslant$ connus.
- Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément.

  Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit élément.

  **Démonstration :**

  Soit $A$ une partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$.

  **Premier cas** $A \cap \mathbb{N} \neq \varnothing$. Alors $A$ contient des éléments positifs, et par conséquent les majorants de $A$ sont des éléments de $\mathbb{N}$, et $A \cap \mathbb{N}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$. $A \cap \mathbb{N}$ admet donc un plus grand élément, disons $x_0$.

  Alors $x_0$ est aussi le plus grand élément de $A$, puisqu'il est élément de $A$, et il est plus grand que les éléments positifs de $A$, et, étant positif, il est aussi plus grand que les éventuels éléments négatifs de $A$.

  **Deuxième cas** $A \cap \mathbb{N} = \varnothing$. Dans ce cas, $A$ est une partie non vide de $\mathbb{Z}_-^*$. Notons $B = \{-x, x \in A\}$. $B$ est alors une partie non vide de $\mathbb{N}$, donc admet un plus petit élément, disons $y_0$. Il est alors clair que $-y_0$ est le plus grand élément de $A$.

  Soit $A$ une partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$, et soit $B = \{-x, x \in A\}$. Alors $B$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$, donc $B$ admet, d'après le point précédent, un plus grand élément, disons $y_0$. Alors il est immédiat que $-y_0$ est le plus petit élément de $A$.

- Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ : Soit $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Alors il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que $a = bq + r$ et $0 \leqslant r < |b|$.

  **Démonstration :**

  **Unicité** Si $(q, r)$ et $(q', r')$ conviennent, alors $b(q - q') = r' - r$, et $-|b| < r' - r < |b|$, d'où il résulte que $q - q' = 0$, puis $r' - r = 0$.

  **Existence**
  - ◇ Si $a \geqslant 0$, $b > 0$, le couple $(q, r)$ fourni par le théorème dans $\mathbb{N}$ convient.
  - ◇ Si $a < 0$, $b > 0$, selon le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{N}$ appliqué au couple $(-a, b)$, on peut introduire $(q_1, r_1) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que $-a = bq_1 + r_1$ et $0 \leqslant r_1 < b$. Alors $a = b(-q_1 - 1) + (b - r_1)$. Si $r_1 = 0$, le couple $(q, r) = (-q_1, 0)$ est comme voulu. Sinon, si $r_1 \geqslant 1$, le couple $(q, r) = (-q_1 - 1, b - r_1)$ convient.
  - ◇ Si $b < 0$, on applique ce qui précède au couple $(a, -b)$, il existe alors un couple $(q_1, r_1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que $a = (-b)q_1 + r_1$ et $0 \leqslant r_1 < -b$ ; le couple $(q, r) = (-q_1, r_1)$ convient.

# II Sur $\mathbb{Q}$

**Théorème :**

Soit $r \in \mathbb{Q}$. Il existe un et un seul couple $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $r = \frac{a}{b}$ et $a \wedge b = 1$.