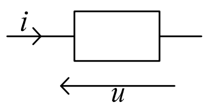
Chapitre 2 : Dipôles linéaires, régime transitoire

I Dipôles R, L, C.

A) Dipôles linéaires



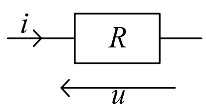
Un dipôle est dit linéaire lorsque u et i sont liés par une équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$a_0 u + a_1 \dfrac{du}{dt} + \ldots + a_n \dfrac{d^n u}{dt^n} = C + b_0 i + b_1 \dfrac{di}{dt} + \ldots + b_n \dfrac{d^n i}{dt^n}$, avec les a_i, b_i constants.

B) Résistors

1) Dipôle linéaire

$$u = Ri \text{ ou } i = \frac{1}{R} u = Gu$$

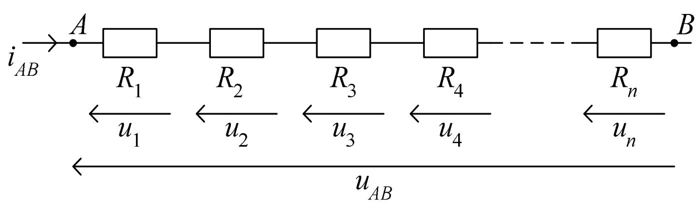


$[R] = [u] \times [i]^{-1} = \mathrm{V.A}^{-1} = \Omega$ (Ohm)

$[G] = [i] \times [u]^{-1} = \mathrm{A.V}^{-1} = S$ (Siemens)

2) Association en série ou en parallèle

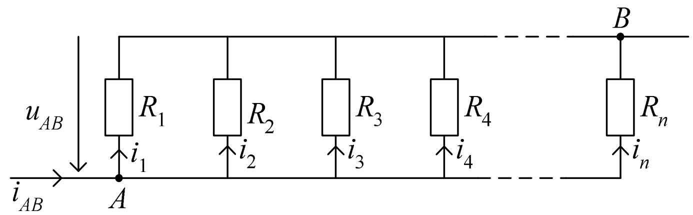
Les dipôles sont en série lorsque ils appartiennent à une même branche (il n'y a pas de nœuds entre eux).



$\forall j \in [\![1;n]\!], u_j = R_j i_{AB}$. On a : $\sum_{j=1}^{n} u_j = i_{AB} \sum_{j=1}^{n} R_j = u_{AB}$.

On a $R_{éq} = \sum_{j=1}^{n} R_j = \dfrac{1}{G_{éq}} = \sum_{j=1}^{n} \dfrac{1}{G_j}$

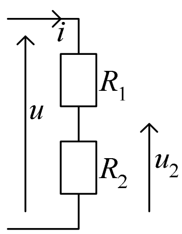
Les dipôles sont en parallèle lorsqu'ils sont liés à deux mêmes nœuds du circuit.



$\forall j \in [\![1;n]\!], i_j = G_j u_{AB}$. D'après la loi des noeuds : $i_{AB} = \sum_{j=1}^{n} i_j = u_{AB} \sum_{j=1}^{n} G_j$

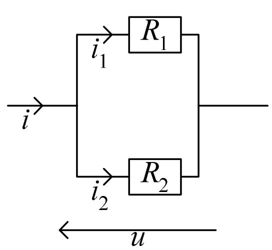
On a $G_{éq} = \sum_{j=1}^{n} G_j = \frac{1}{R_{éq}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{R_j}$

3) Diviseur de tension



$$\left.\begin{array}{l} u_2 = R_2 i \\ u = (R_1 + R_2) i \\ \text{donc } \boxed{u_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u} \end{array}\right.$$

4) Diviseur de courant

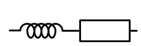


$$\left.\begin{array}{l} i_2 = G_2 u \\ i = (G_1 + G_2) u \\ \text{donc } \boxed{i_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} i} \end{array}\right.$$

C) Bobines

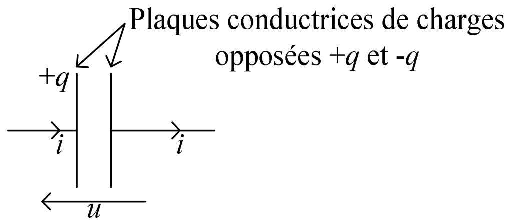
Bobine idéale :  $u = L\frac{di}{dt}$. L est l'inductance de la bobine, positive.

$[L] = \frac{[u][t]}{[i]} = \Omega.\text{s} = \text{H}$ (Henry).

Bobine réelle :  $u = ri + L\frac{di}{dt}$ (i est continu)

La bobine est donc un dipôle linéaire.

D) Condensateur



Conservation de la charge : $Q_v(t \text{ ou } t+dt)$: charge dans v (armature de gauche) à t ou $t+dt$.

$Q_v(t+dt) = Q_v(t) + i \times dt \Leftrightarrow q(t+dt) = q(t) + i \times dt \Leftrightarrow i = \dfrac{q(t+dt)-q(t)}{dt} = \dfrac{dq}{dt}$ où C est une constante positive, la capacité du condensateur.

Relation entre u et i :

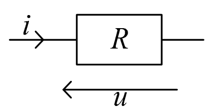
$u = \dfrac{q}{C} \Rightarrow \dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{C}\dfrac{dq}{dt} \Leftrightarrow C\dfrac{du}{dt} = i$ (donc u est continue)

Le condensateur est donc un dipôle linéaire.

$$[C] = \frac{[i][t]}{[u]} = \Omega^{-1}\text{s} = \text{F (Farad)}.$$

E) Aspect énergétique

1) Effet Joule



$$P = u \times i = (Ri) \times i = Ri^2$$

$$P = u \times i = u \times (Gu) = Gu^2$$

Interprétation microscopique : les porteurs de charge gagnent de l'énergie cinétique sous la tension et cèdent cette énergie cinétique à cause des chocs avec le conducteur. Transfert d'énergie = transfert thermique (chaleur).

$\delta Q = Ri^2 dt$ (Effet Joule)

2) Energie magnétique stockée par une bobine

Bobine idéale : $P = u \times i = Li\dfrac{di}{dt} = \dfrac{d(\frac{1}{2}Li^2)}{dt}$. $\qquad (\dfrac{di^2}{dt} = 2i\dfrac{di}{dt})$

On pose $E_m = \dfrac{1}{2}Li^2$. Donc $P = \dfrac{dE_m}{dt} \Leftrightarrow dE_m = Pdt = \delta W$.

E_m est donc l'énergie magnétique stockée dans la bobine sous la forme d'un champ magnétique. Quand $P > 0$, E_m augmente, quand $P < 0$, E_m diminue.

3) Energie électrique stockée par un condensateur

$$P = u \times i = u \times C\frac{du}{dt} = \frac{d(\frac{1}{2}Cu^2)}{dt}.$$

On pose $E_{él} = \frac{1}{2}Cu^2$. Donc $P = \frac{dE_{él}}{dt} \Leftrightarrow dE_{él} = Pdt = \delta W$.

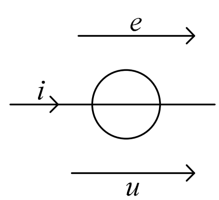
$E_{él}$ est donc l'énergie électrique stockée par le condensateur sous la forme d'un champ électrique. Quand $P > 0$, $E_{él}$ augmente, quand $P < 0$, $E_{él}$ diminue.

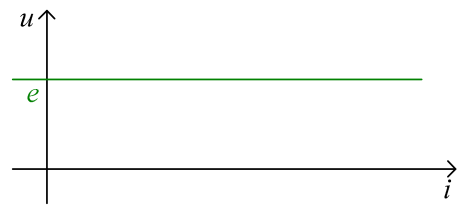
II Générateurs linéaires

A) Sources de tension et de courant idéales

1) Source de tension idéale

C'est un dipôle aux bornes duquel *u* est constante, quel que soit *i*.



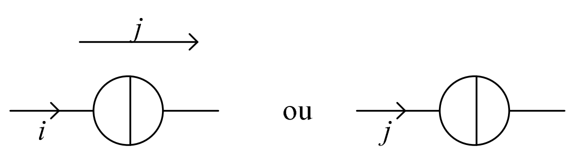


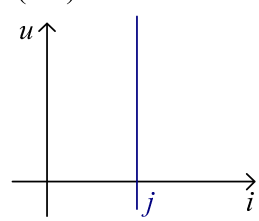
e : force électromotrice de la source de tension (fém).

2) Source de courant idéale

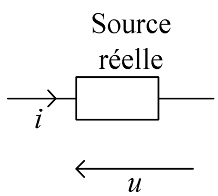
C'est un dipôle traversé par un courant constant d'intensité constante, quelle que soit la tension.

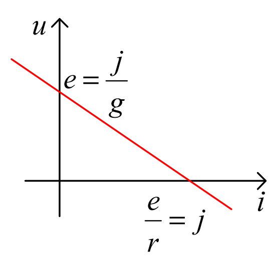
j : courant électromoteur ou courant de court-circuit (ccc) de la source.



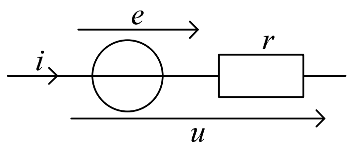


B) Source réelle





Représentation de Thévenin :

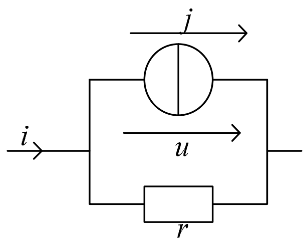


Caractéristique : $u = e - ri$

e : fém de la source

r : résistance interne

Représentation de Norton :



$i = \frac{e}{r} - \frac{u}{r} = j - gu$ avec $j = \frac{e}{r}$ et $g = \frac{1}{r}$

j : ccc de la source

g : conductance interne.

C) Dipôles linéaires en régime continu

En régime continu, u et i sont indépendants du temps : $\frac{du}{dt} = \frac{di}{dt} = 0$

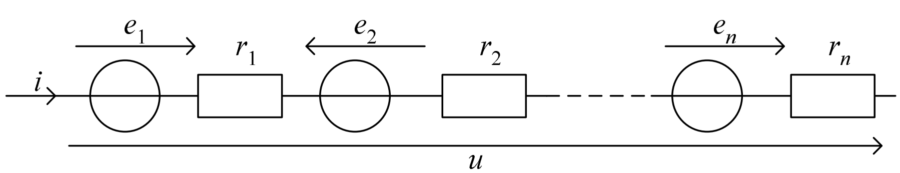
Donc l'équation différentielle devient : $a_0 u = C + b_0 i$

Un dipôle linéaire est donc un générateur linéaire en courant continu.

D) Association en série et en parallèle de dipôles linéaires

1) En série

Dipôles représentés dans le modèle de Thévenin :

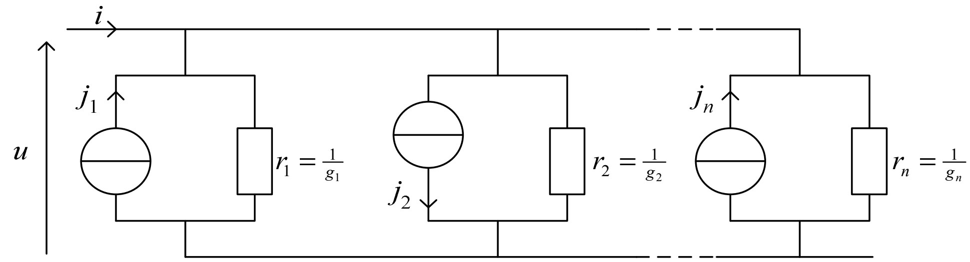


$u = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k e_k - r_k i$ où $\varepsilon_k = 1$ si e_k et u sont dans le même sens, -1 sinon.

Donc $u = \sum_{k=1}^{n} (\varepsilon_k e_k) - i \sum_{k=1}^{n} r_k$. Une association en série de dipôles linéaires est donc un dipôle linéaire de fém la somme des fém des dipôles, et de résistance interne la somme des résistances internes des dipôles.

2) En parallèle

Représentation dans le modèle de Norton :

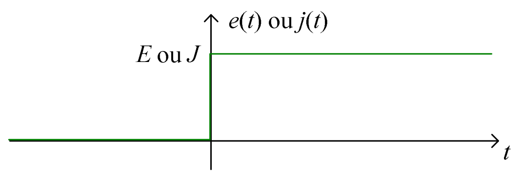


Loi des nœuds :

$$i = j_1 - g_1 u + (-j_2) - g_2 u + \ldots + j_n - g_n u = \sum_{k=1}^{n} (\varepsilon_k j_k) - u \sum_{k=1}^{n} g_k \,.$$

Une association en parallèle de dipôles linéaires est donc un dipôle linéaire de courant de court-circuit la somme des courants de court-circuit des dipôles, et de conductance interne la somme des conductances internes des dipôles.

E) Echelon de tension et de courant

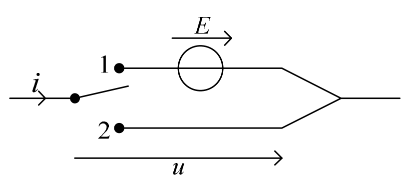


1) Echelon de tension

$e(t) = 0$ si $t < 0$

$e(t) = E$ si $t \geq 0$

Réalisation :



Pour $t < 0$, interrupteur en 2. $u = 0$

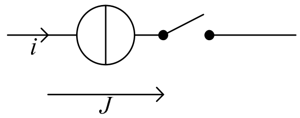
Pour $t \geq 0$, interrupteur en 1. $u = E$

2) Echelon de courant

$j(t) = 0$ si $t < 0$

$j(t) = J$ si $t \geq 0$

Réalisation :



Pour $t < 0$, interrupteur ouvert. $i = 0$
Pour $t \geq 0$, interrupteur fermé. $i = J$

3) Fonction de Heavyside

$$\begin{cases} Y(t) = 0 \text{ si } t < 0 \\ Y(t) = 1 \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$$

Donc e $e(t) = E \times Y(t)$, $j(t) = J \times Y(t)$

III Equations différentielles linéaires à coefficients constants du 1er et 2nd ordre

A) Equation différentielle du 1er ordre

1) Homogène (sans 2nd membre)

$Y' + aY = 0$, où $a \in \mathbb{R}^*$

f est solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, ($\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + a \times f(x) = 0) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ke^{-ax}$ (l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 1)

2) Avec 2nd membre

$Y' + aY = Y_0$, où $a \in \mathbb{R}^*$, et $Y_0 \in C^0(I, \mathbb{R})$.

f est solution de l'équation différentielle sur *I* si, et seulement si, $\forall x \in I$, $f'(x) + a \times f(x) = Y_0(x)$. On suppose que l'on en connaît une solution particulière f_0. Alors *f* est solution de l'équation différentielle sur *I* si et seulement si $\forall x \in I$, $f'(x) - f_0'(x) + a \times f(x) - a \times f_0(x) = Y_0(x) - Y_0(x) = 0$ soit, pour tout x de *I*, $(f' - f_0')(x) + a \times (f - f_0)(x) = 0) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f_0(x) + ke^{-ax}$
(car $f - f_0$ est alors solution de $Y' + aY = 0$)

3) Second membre continu par morceau

Cas particulier : Y_0 constante par morceaux ("en escalier").

Sur $]x_0, x_1[$, $Y_0(x) = b_1$ et $f(x) = \dfrac{b_1}{a} + k_1 e^{-ax}$.

Sur $]x_1, x_2[$, $Y_0(x) = b_2$ et $f(x) = \dfrac{b_2}{a} + k_2 e^{-ax}$, etc.

On admet que si f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle, alors f est continue sur $\mathbb{R}$. Continuité en x_1 :

$$f(x_1^-) = \lim_{x \to x_1^-} f(x) = \frac{b_1}{a} + k_1 e^{-ax_1}$$

$$f(x_1^+) = \lim_{x \to x_1^+} f(x) = \frac{b_2}{a} + k_2 e^{-ax_1}$$

Continuité en $x = x_1 \Leftrightarrow f(x_1^-) = f(x_1^+) \Leftrightarrow \frac{b_1}{a} + k_1 e^{-ax_1} = \frac{b_2}{a} + k_2 e^{-ax_1}$

On peut alors trouver k_2 en fonction de k_1.

B) Equations différentielles du 2nd ordre homogène

$aY''+bY'+cY = 0$, où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

On admet que les solutions forment un ensemble vectoriel de dimension 2. f est solution de l'équation différentielle si, et seulement si, il existe α_1, α_2 tels que $f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ (où f_1, f_2 sont deux solutions particulières non proportionnelles)

Une solution de la forme $F(x) = e^{rx}$ donne :

F est solution de l'équation si, et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}, ar^2 e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$ $\Leftrightarrow ar^2 + br + c = 0$. Donc r est solution de l'équation du 2nd degré.

1) Cas $\Delta > 0$.

2 racines réelles $r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Donc $f_1 : x \to e^{r_1 x}$ et $f_2 : x \to e^{r_2 x}$ sont solutions de l'équation différentielle. (non proportionnelles).

Donc f est solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si :

$\exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \boxed{f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) = \alpha_1 e^{r_1 x} + \alpha_2 e^{r_2 x}}$.

2) Cas $\Delta = 0$.

1 racine double $r = \frac{-b}{2a}$.

Donc $f_1 : x \to e^{rx}$ est solution de l'équation différentielle. De plus, $f_2 : x \to xe^{rx}$ est aussi solution de l'équation différentielle. (Vérification…) Ces deux solutions ne sont pas proportionnelles. Donc f est solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si : $\exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$, soit aussi :

$\exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \boxed{f(x) = (\alpha_1 + \alpha_2 x) e^{\frac{-b}{2a}x}}$.

3) Cas $\Delta < 0$.

2 racines complexes $r_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

Donc $f_1 : x \to e^{\frac{-b}{2a}x} \times e^{\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}x}$ et $f_2 : x \to e^{\frac{-b}{2a}x} \times e^{\frac{-i\sqrt{-\Delta}}{2a}x}$ sont solutions complexes non proportionnelles de l'équation différentielle. Donc *f* est solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{C}$ si, et seulement si : $\exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}, f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$, soit aussi : $\exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, \boxed{f(x) = (\alpha_1 e^{\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}x} + \alpha_2 e^{\frac{-i\sqrt{-\Delta}}{2a}x})e^{\frac{-b}{2a}x}}$ D'où $\forall x \in \mathbb{R}$:

$f(x) = \left((\alpha_1 + \alpha_2)\cos(\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x) + i(\alpha_1 - \alpha_2)\sin(\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x) \right) e^{\frac{-b}{2a}x}$. Pour que *f* soit une solution réelle, il suffit donc que $\boxed{\alpha_2 = \overline{\alpha_1}}$. On ne considère que les solutions réelles. On a ainsi :

$$\exists A, B \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \left(A\cos(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x) + B\sin(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x) \right) e^{\frac{-b}{2a}x}.$$

$$A\cos(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x) + B\sin(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x) = \sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x) + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x) \right)$$

On pose $\beta_1 = \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ et $\beta_2 = \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Donc $\beta_1{}^2 + \beta_2{}^2 = 1$

$$A\cos(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x) + B\sin(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x) = \sqrt{A^2+B^2}\left(\cos\varphi\cos(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x) - \sin\varphi\sin(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x) \right)$$

Avec $\varphi \in [0;2\pi[$, tel que $\cos\varphi = \beta_1$ et $\sin\varphi = -\beta_2$.

$$A\cos(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x) + B\sin(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x) = \sqrt{A^2+B^2}\cos(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x + \varphi).$$

Ainsi, *f* est solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si : $\exists (C,\varphi) \in \mathbb{R}^+ \times [0;2\pi[, \forall x \in \mathbb{R}, \boxed{f(x) = Ce^{\frac{-b}{2a}x}\cos(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x + \varphi)}$.

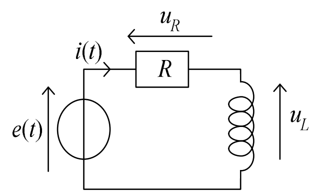
C) Equation différentielle du 2nd ordre avec 2nd membre

Même chose que pour l'équation différentielle de 1er ordre : trouver une solution particulière f_0, et la solution générale de l'équation est la "somme" de cette fonction particulière f_0 et de la solution générale de l'équation différentielle homogène associée.

F solution générale de l'équation différentielle avec 2nd membre = Solution particulière f_0 + Solution générale homogène $(F - f_0)$.

IV Circuit *R,L*

A) Equation électrique du circuit *R,L*



D'après la loi des mailles :

$e(t) - u_R - u_L = 0$

Donc $e(t) = Ri + L\dfrac{di}{dt}$. Equation différentielle du 1er ordre avec 2nd membre.

B) Réponse à un échelon de tension

$$e(t) = E \times y(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ E \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$$

Résolution sur $\mathbb{R}_-^*$:

$Ri + L\dfrac{di}{dt} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{di}{dt} + \dfrac{R}{L}i = 0$. Donc $i(t) = k \times e^{-\frac{R}{L}t}, k \in \mathbb{R}$

Si $k \neq 0$, $\lim\limits_{-\infty} k \times e^{-\frac{R}{L}t} = \pm\infty$, ce qui est impossible physiquement.

Donc $k = 0$. Donc $i(t) = 0$

Résolution sur $\mathbb{R}_+^*$:

$E = Ri + L\dfrac{di}{dt} \Leftrightarrow \dfrac{di}{dt} + \dfrac{R}{L}i = \dfrac{E}{L}$. Donc $i(t) = \dfrac{E}{R} + k \times e^{-\frac{R}{L}t}, k \in \mathbb{R}$

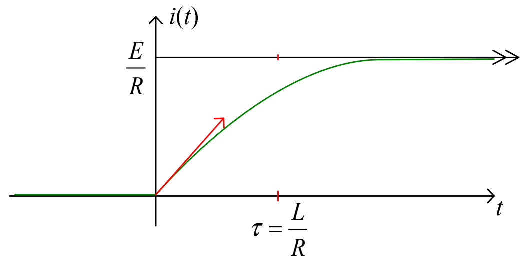
Le courant qui traverse la bobine est une fonction continue du temps.

Donc $i(0^-) = i(0^+) \Leftrightarrow k + \dfrac{E}{R} = 0 \Leftrightarrow k = -\dfrac{E}{R}$

$$\text{Donc } i(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \leq 0 \\ \dfrac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$$

$$u_R = R \times i = \begin{cases} 0 \text{ si } t \leq 0 \\ E\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$$

$$u_L = L\frac{di}{dt} = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ Ee^{-\frac{R}{L}t} \text{ si } t > 0 \end{cases}$$



$$\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0^+} = \frac{E}{L}$$

$\tau = \dfrac{L}{R}$: temps de relaxation ou constante de temps du circuit R,L.

On distingue trois zones :
$t < 0$, régime permanent $i = 0$
$t >> \tau$, régime permanent $i \approx \dfrac{E}{R}$
$0 < t < 3\tau$, régime transitoire

Pour $t = \tau$, $i(\tau) = \dfrac{E}{R}(1 - \dfrac{1}{e}) = 63\% \times \dfrac{E}{R}$
Pour $t = 3\tau$, $i(3\tau) = 95\% \times \dfrac{E}{R}$
τ est la durée caractéristique du régime transitoire.

C) Régime libre du circuit R,L

Ici, $e(t) = E \times y(-t) = \begin{cases} E \text{ si } t < 0 \\ 0 \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$

Résolution sur $\mathbb{R}_-^*$:

$$E = Ri + L\frac{di}{dt} \Leftrightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}. \text{Donc } i(t) = \frac{E}{R} + k \times e^{-\frac{R}{L}t}, k \in \mathbb{R}$$

De même ici, $k = 0$. Donc $i(t) = \dfrac{E}{R}$

Résolution sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$Ri + L\frac{di}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0. \text{Donc } i(t) = k \times e^{-\frac{R}{L}t}, k \in \mathbb{R}$$

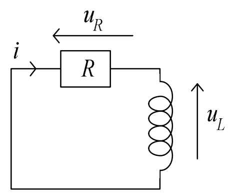
$$i(0^-) = i(0^+) \Leftrightarrow \frac{E}{R} = k$$

Donc $i(t) = \begin{cases} \dfrac{E}{R} \text{ si } t \leq 0 \\ \dfrac{E}{R}e^{-t/\tau} \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$

$$u_R = R\times i = \begin{cases} E \text{ si } t \leq 0 \\ Ee^{-t/\tau} \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$$

$$u_L = L\frac{di}{dt} = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ -Ee^{-t/\tau} \text{ si } t > 0 \end{cases}$$

Aspect énergétique :
Pour $t \geq 0$:



$$P_{\text{Joule}} = Ri^2 = \frac{E^2}{R}e^{-2t/\tau}$$

Entre $t = 0$ et $t = +\infty$, énergie dissipée par effet Joule :

$$= \int_0^{+\infty} P(t)dt = \frac{E^2}{R}\left[\frac{-\tau}{2}e^{-2t/\tau}\right]_0^{+\infty} = \frac{E^2}{R}(-\frac{L}{2R})\times(0-1) = \frac{1}{2}L\left(\frac{E}{R}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}L\underbrace{\left(\frac{E}{R}\right)}_{i(0)}^2 - \frac{1}{2}L\times\underbrace{(0)}_{i(+\infty)}^2 = E_m(0) - E_m(+\infty)$$

L'énergie magnétique stockée à $t = 0$ dans la bobine est dissipée par effet Joule dans la résistance.

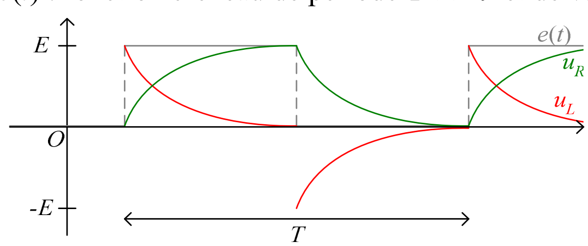
D) Visualisation à l'oscilloscope

A $t \geq 0$:

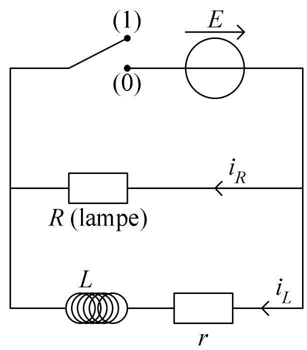
Echelon de tension $\begin{cases} u_L = -Ee^{-t/\tau} \\ u_R = Ee^{-t/\tau} \end{cases}$

Régime libre $\begin{cases} u_L = Ee^{-t/\tau} \\ u_R = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \end{cases}$

$e(t)$: fonction créneau de période $T >> \tau$ et de valeur maximale E.



E) Application



La lampe s'allume quand $|i_R| > i_{\text{seuil}}$

On suppose que $\dfrac{E}{R} < i_{\text{seuil}} < \dfrac{E}{r}$

Pour $t < 0$, l'interrupteur est en (0), la lampe ne s'allume pas.

$$\begin{cases} E - Ri_R = 0 \quad i_R = \dfrac{E}{R} & \text{(Loi des mailles)} \\ E = L\dfrac{di_L}{dt} + r \times i_L \quad i_L = \dfrac{E}{r} & \text{(Régime libre pour } t < 0\text{)} \end{cases}$$

Pour $t \geq 0$, l'interrupteur est en (1). Alors $i_R = -i_L$ (le courant parcourant la branche du générateur est nul).

D'après la loi des mailles,

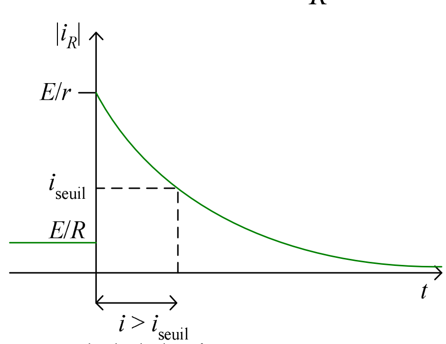
$$R \times i_R + r \times i_R + L\frac{di_R}{dt} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{di_R}{dt} + \frac{(R+r)}{L} \times i_R = 0$$

$$\Leftrightarrow i_R = k \times e^{-\frac{R+r}{L}t}, \ k \in \mathbb{R}$$

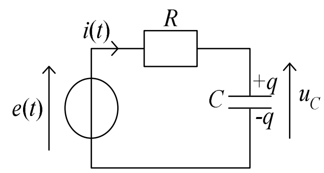
Le courant dans la bobine est continu.

Donc $i_L(0^-) = i_L(0^+) \Leftrightarrow \dfrac{E}{R} = -i_R(0^+)$. Donc $k = -\dfrac{E}{R}$



V Circuit *R,C*

A) Equation électrique du circuit *R,C*



$$e(t) = u_R + u_C = R \times i + \frac{q}{C} \quad \text{et } i = \frac{dq}{dt}$$

Donc $e(t) = R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{e(t)}{R}$$

B) Réponse à un échelon de tension

Ici, on a $e(t) = E \times y(t)$

Solution pour $t < 0$:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = 0 \Leftrightarrow q(t) = k \times e^{-t/RC} = k \times e^{-t/\tau},\ k \in \mathbb{R}$$

De même ici, on aura $k = 0$, donc $q(t) = 0$

Le condensateur correspond à un interrupteur ouvert en régime permanent : c'est un coupe-circuit.

Solution pour $t > 0$:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{E}{R} \Leftrightarrow q(t) = EC + k \times e^{-t/\tau},\ k \in \mathbb{R}$$

Pour que q soit continu, il faut que $EC + k = 0$, soit $k = -CE$

Donc $\begin{cases} q(t) = 0 \text{ si } t \leq 0 \\ q(t) = CE(1 - e^{-t/\tau}) \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$

$$u_C = \frac{q}{C} = \begin{cases} 0 \text{ si } t \leq 0 \\ E(1 - e^{-t/\tau}) \text{ si t} \geq 0 \end{cases}$$

$$u_R = R\frac{dq}{dt} = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ Ee^{-t/\tau} \text{ si } t > 0 \end{cases}$$

τ est la constante de temps ou temps de relaxation du système.

C) Régime libre

$e(t) = Y \times Y(t)$

Pour $t < 0$:

$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{\tau} = \frac{E}{R} \Leftrightarrow q(t) = EC + k \times e^{-t/\tau}$, $k \in \mathbb{R}$

Donc $q(t) = CE$

Pour $t > 0$:

$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{\tau} = 0 \Leftrightarrow q(t) = k \times e^{-t/\tau} = CE \times e^{-t/\tau}$

Donc $\begin{cases} q(t) = CE \text{ si } t \leq 0 \\ q(t) = CEe^{-t/\tau} \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$

$u_C = \begin{cases} E \text{ si } t \leq 0 \\ Ee^{-t/\tau} \text{ si t} \geq 0 \end{cases}$

$u_R = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ -Ee^{-t/\tau} \text{ si } t > 0 \end{cases}$

Aspect énergétique :

Pour $t > 0$, on a ($i \neq 0$) :

$u_R + u_C = 0 \Leftrightarrow u_R i + u_C i = 0 \Leftrightarrow Ri^2 + \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} = 0 \Leftrightarrow Ri^2 = -\frac{d}{dt}\left(\frac{q^2}{2C}\right)$

On a donc :

$\int_0^{+\infty} Ri^2 dt = \int_0^{+\infty} -d\left(\frac{q^2}{2C}\right) = \left[-\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}\frac{q(0)^2}{C}$

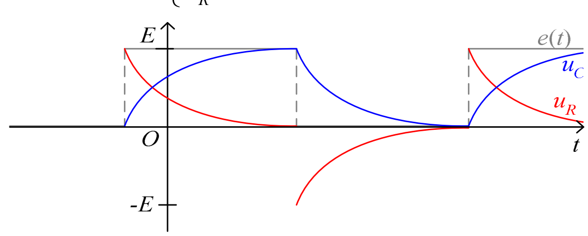
L'énergie stockée dans le condensateur à $t = 0$ est redistribuée au circuit sous forme d'effet Joule, dissipée dans la résistance.

D) Visualisation à l'oscilloscope

A $t \geq 0$:

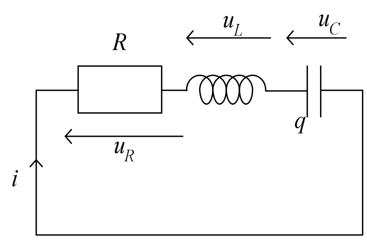
Echelon de tension $\begin{cases} u_C = E(1 - e^{-t/\tau}) \\ u_R = Ee^{-t/\tau} \end{cases}$

Régime libre $\begin{cases} u_C = Ee^{-t/\tau} \\ u_R = -Ee^{-t/\tau} \end{cases}$



VI Circuit *R,L,C*

A) Régime propre du circuit *R,L,C* série



On note $q(0) = q_0$; $i(0) = i_0$

D'après la loi des mailles, on a :

$u_R + u_L + u_C = 0$

$\Leftrightarrow Ri + L\dfrac{di}{dt} + \dfrac{q}{C} = 0$

On a $i = \dfrac{dq}{dt}$

Donc l'équation devient $R\dfrac{dq}{dt} + L\dfrac{d^2q}{dt^2} + \dfrac{q}{C} = 0$, soit $\dfrac{d^2q}{dt^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{q}{LC} = 0$

On a donc une équation différentielle homogène linéaire du 2nd ordre.

On pose :

$\dfrac{R}{L} = 2\lambda$ (λ est le coefficient d'amortissement)

$\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ (Pulsation propre)

L'équation différentielle devient alors :

$\dfrac{d^2q}{dt^2} + 2\lambda\dfrac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0$ ou, en posant $\boxed{\dfrac{\omega_0}{Q} = 2\lambda \text{ (Q est le facteur de qualité)}}$:

$\dfrac{d^2q}{dt^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0$

$[\lambda] = \mathrm{s}^{-1}$; $[\omega_0] = \mathrm{s}^{-1}$; $[Q] = 1$

Résolution de l'équation électrique :

L'équation caractéristique de l'équation différentielle est $X^2 + 2\lambda X + \omega_0^2 = 0$

$\Delta = 4\lambda^2 - 4\omega_0^2 = 4(\lambda^2 - \omega_0^2)$

1er cas : $\Delta > 0$ (soit $\lambda > \omega_0$ ou $Q < \dfrac{1}{2}$)

On a alors deux solutions réelles $X_{1,2} = \dfrac{-2\lambda \pm \sqrt{\Delta}}{2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} < 0$

La solution générale de l'équation différentielle s'écrit donc :

$q(t) = Ae^{X_1 t} + Be^{X_2 t} = Ae^{(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t} + Be^{(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t}$

On a donc un régime apériodique.

Détermination de A et B : en prenant par exemple $q_0 \neq 0$; $i_0 = 0$

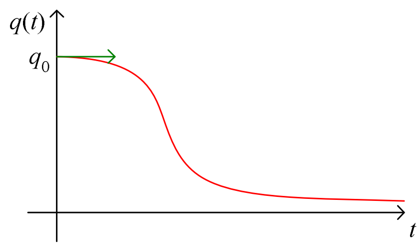
$$i(t) = \frac{dq}{dt} = AX_1 e^{X_1 t} + BX_2 e^{X_2 t}$$

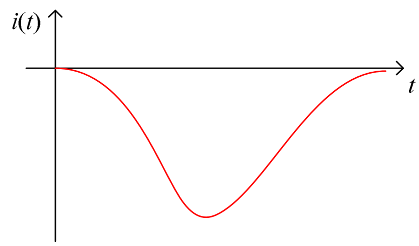
Comme le courant traversant la bobine est continu, $i(0^+) = i_0 \Leftrightarrow AX_1 + BX_2 = 0$

Comme la charge du condensateur est continue, $q(0^+) = q_0 \Leftrightarrow A + B = q_0$

Donc $\begin{cases} A = \dfrac{q_0 X_2}{X_2 - X_1} \\ B = \dfrac{-q_0 X_1}{X_2 - X_1} \end{cases}$

Allure des courbes :





$X_1, X_2 \approx -\lambda$

Le temps caractéristique est donc $1/\lambda$

2ème cas : $\Delta = 0$ (soit $\lambda = \omega_0$ ou $Q = \dfrac{1}{2}$)

On a une racine double $X = \dfrac{-2\lambda}{2} = -\lambda = -\omega_0$

La solution générale est donc :

$q(t) = (At + B)e^{-\lambda \times t}$, solution du régime critique.

Détermination de A et B pour $q_0 \neq 0$; $i_0 = 0$:

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = Ae^{-\lambda \times t} - (At + B)\lambda e^{-\lambda \times t} = (-\lambda At + A - \lambda B)e^{-\lambda \times t}$$

Ainsi, $A - \lambda B = 0$ et $B = q_0$, soit $A = q_0 \lambda$ et $B = q_0$

Donc $q(t) = q_0(\lambda t + 1)e^{-\lambda \times t}$. Et $i(t) = -q_0 \lambda^2 t \times e^{-\lambda t}$

La représentation est analogue au cas où $\Delta > 0$.

Le temps caractéristique vaut $1/\lambda$ (durée du régime libre).

3ème cas : $\Delta < 0$ (soit $\lambda < \omega_0$ ou $Q > \dfrac{1}{2}$)

$\Delta = 4\lambda^2 - 4\omega_0^2 = 4(\lambda^2 - \omega_0^2) < 0$. On pose $\boxed{\omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2 \text{ (pseudo - pulsation)}}$

Donc $\Delta = -4\omega^2$. Ainsi, $X_{1,2} = -\lambda \pm \omega \times i$

Solution générale (réelle):

$$\begin{aligned} q(t) &= \alpha e^{X_1 t} + \beta e^{X_2 t} = e^{-\lambda \times t}(\alpha e^{i\omega \times t} + \beta e^{-i\omega \times t}) \\ &= e^{-\lambda \times t}(A\cos \omega.t + B\sin \omega.t) \\ &= Ce^{-\lambda \times t}\cos(\omega.t + \varphi) \quad (\text{Avec } C = \sqrt{A^2 + B^2}) \end{aligned}$$

On a alors :

$$i(t) = -\lambda e^{-\lambda\times t}(A\cos\omega.t + B\sin\omega.t) + (-A\omega\sin\omega.t + B\omega\cos\omega.t)e^{-\lambda\times t}$$
$$= e^{-\lambda\times t}\left(\cos\omega.t\times(-\lambda A + B\omega) + \sin\omega.t\times(-B\lambda - A\omega)\right)$$

On a un régime pseudopériodique.

Détermination de A et B pour $q_0 \neq 0$; $i_0 = 0$:

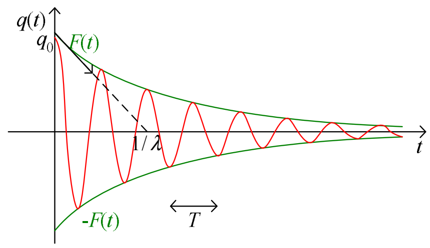
$$\begin{cases} -A\lambda + B\omega = 0 \\ A = q_0 \end{cases} \text{Donc} \begin{cases} A = q_0 \\ B = \dfrac{\lambda q_0}{\omega} \end{cases}$$

Donc

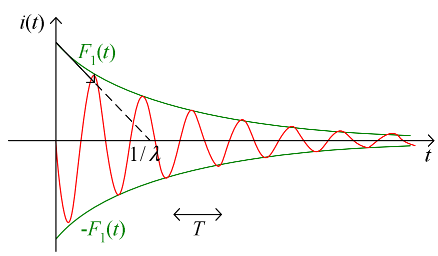
$$q(t) = q_0 e^{-\lambda\times t}(\cos\omega.t + \frac{\lambda}{\omega}\sin\omega.t)$$
$$= \underbrace{\frac{\sqrt{\omega^2+\lambda^2}}{\omega} q_0 e^{-\lambda\times t}}_{F(t)}\cos(\omega.t+\varphi) \text{ où } \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{\omega}{\sqrt{\omega^2+\lambda^2}} \\ -\sin\varphi = \dfrac{\lambda}{\sqrt{\omega^2+\lambda^2}} \end{cases}$$

$$i(t) = \underbrace{-q_0 e^{-\lambda\times t}(\frac{\lambda^2}{\omega} + \omega)}_{F_1(t)}\sin\omega.t$$

Représentation graphique :



$$q(t) = F(t) \Leftrightarrow \cos(\omega.t+\varphi) = 1 \Leftrightarrow \omega.t + \varphi = 0\ [2\pi] \Leftrightarrow t = \frac{-\varphi}{\omega} + \underbrace{\frac{2\pi}{\omega}}_{T}n,\ n \in \mathbb{Z}$$



$$q(t+T) = q_0\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{\omega^2}}\times e^{-\lambda(t+T)}\cos(\omega(t+T)+\varphi) = q(t)e^{-\lambda\times T}$$

$$i(t+T) = -q_0(\frac{\lambda^2}{\omega}+\omega)\times e^{-\lambda(t+T)}\sin(\omega(t+T)+\varphi) = i(t)e^{-\lambda\times T}$$

On pose $\boxed{\delta = \lambda \times T,\ \text{décrément logarithmique}}$ (sans dimension)

$$\delta = \lambda \times T = \frac{T}{1/\lambda} = \frac{\text{pseudopériode}}{\text{temps de relaxation}}$$

Ainsi,

δ petit $\Leftrightarrow$ temps d'amortissement grand par rapport à la pseudopériode

$\Leftrightarrow$ l'amortissement est faible

δ grand $\Leftrightarrow$ temps d'amortissement petit par rapport à la pseudopériode

$\Leftrightarrow$ l'amortissement est important

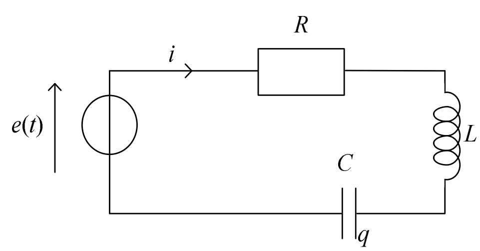
Relation entre l'amortissement et Q :

On suppose $Q >> 1$ on a alors : $\lambda = \dfrac{\omega_0}{2Q} << \omega_0$. Donc $\omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2 \approx \omega_0^2$

Ainsi, $\delta = \lambda \times T = \lambda \dfrac{2\pi}{\omega} = \lambda \dfrac{2\pi}{\omega_0} = \dfrac{\omega_0}{2Q} \times \dfrac{2\pi}{\omega_0} = \dfrac{\pi}{Q} << 1$

On a donc un régime d'amortissement faible.

B) Réponse à un échelon de tension



$$e(t) = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = R\frac{dq}{dt} + L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = \frac{e(t)}{L}$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\lambda\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{e(t)}{L}$$

Résolution sur $\mathbb{R}_-^*$: $e(t) = 0$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\lambda\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0 \Rightarrow q(t) = 0,\ i(t) = 0 \ \text{(régime permanent)}$$

Résolution sur $\mathbb{R}_+^*$: $e(t) = E$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\lambda\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{E}{L}$$

$$q(t) = \text{SP} + \text{SGH}$$

$$q(t) = CE + \text{"dépend de } \lambda \text{ et } \omega_0\text{"}$$

En régime pseudopériodique :

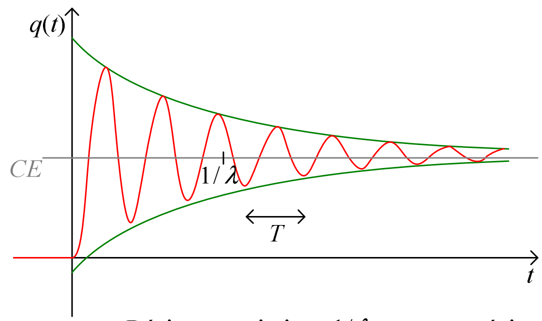
$q(t) = CE + e^{-\lambda.t}(A\cos\omega.t + B\sin\omega.t)$ avec $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$

Comme $q(t)$ est continu (présence du condensateur), $q(0^+) = 0$

Donc $CE + A = 0$, $A = -CE$ et $B = \dfrac{A\lambda}{\omega} = \dfrac{-CE\lambda}{\omega}$ (en dérivant)

Donc $q(t) = CE\left(1 - e^{-\lambda.t}(\cos\omega.t + \dfrac{\lambda}{\omega}\sin\omega.t)\right)$

$\lim\limits_{t\to+\infty} q(t) = CE$



Régime permanent　　Régime transitoire $\sim 1/\lambda$　　...régime permanent $t >> 1/\lambda$

C) Aspect énergétique

Equation électrique $e(t) = Ri + L\dfrac{di}{dt} + \dfrac{q}{C}$

Donc $i \times e(t) = Ri^2 + Li\dfrac{di}{dt} + \dfrac{q}{C}\dfrac{dq}{dt}$

Soit $P_{\text{fournie}} = P_{\text{Joule}} + P_{\text{Bobine}} + P_{\text{Condensateur}}$

En régime libre, $e(t) = 0$

$Ri^2 + Li\dfrac{di}{dt} + \dfrac{q}{C}\dfrac{dq}{dt} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right)}_{\substack{\text{Energie électromagnétique} \\ \text{dans } L \text{ et } C,\, = E_{\text{ém}}}} = -Ri^2 < 0$$

Donc $E_{\text{ém}}(t)$ diminue et tend vers 0 avec une constante de temps $1/\lambda$

Perte d'énergie au cours d'une pseudo période :

$q(t+T) = e^{-\lambda.T}q(t)$

$i(t+T) = e^{-\lambda.T}i(t)$

Donc $E_{\text{ém}}(t+T) = \dfrac{1}{2}L \times (i(t+T))^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{(q(t+T))^2}{C} = E_{\text{ém}}(t)e^{-2\lambda.T}$

Perte relative d'énergie au cours d'une pseudo période :

$$p = \frac{E_{\text{ém}}(t) - E_{\text{ém}}(t+T)}{E_{\text{ém}}(t)} = 1 - e^{-2\lambda.T}$$

Pour un amortissement faible ($Q >> 1$) :

$$\delta = \frac{\pi}{Q} << 1$$

Développement limité de $x \mapsto e^x$ au voisinage de $x = 1$:

$e^x \approx 1 + x$

Donc $e^{-2\lambda.T} \approx 1 - 2\lambda.T$. Donc $p \approx 2\lambda.T = \dfrac{2\pi}{Q}$

Donc p est d'autant plus petit que Q est élevé.

Ainsi, pour $Q >> 1$, les pertes électromagnétiques sont faibles

Pour $Q \approx 1$, les pertes sont fortes (Attention, la relation $p \approx \dfrac{2\pi}{Q}$ n'est plus vraie : elle n'est valable que pour $Q >> 1$)