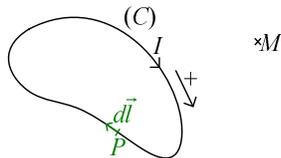


Chapitre 2 : Calcul de champs magnétiques

I Loi de Biot et Savart

A) Enoncé



(C) : circuit filiforme orienté, définissant le courant I .
 M est un point de l'espace.

Un élément $d\vec{l}$ en P du fil crée en M un champ magnétique :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{u}_{PM}}{PM^2}$$

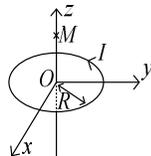
μ_0 : perméabilité du vide = $4\pi 10^{-7}$ H.m⁻¹

principe de superposition :

$$(C) \text{ crée en } M \text{ un champ magnétique } \vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{(C)} \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{u}_{PM}}{PM^2}$$

B) Champ magnétique créé par une spire circulaire sur son axe

On considère une spire de centre O , rayon R parcourue par un courant I (définissant le sens positif)



On cherche le champ \vec{B} en un point M de côte z sur l'axe (Oz).

Le plan yOz est un plan d'antisymétrie pour $\{I\}$, donc un plan de symétrie pour $\{\vec{B}\}$. Comme $M \in yOz$, on a $B_x = 0$.

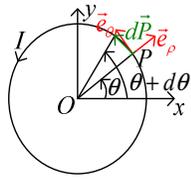
De même avec xOz , on aura $B_y = 0$.

$$\text{Donc } \vec{B}(M) = B_z(0,0,z)\vec{k} = B_z(z)\vec{k}$$

De plus, B_z est une fonction paire : le plan xOy est un plan de symétrie pour $\{I\}$, donc un plan d'antisymétrie pour $\{\vec{B}\}$. Donc, en M' d'abscisse $-z$, on aura :

$$B_z(-z)\vec{k} = \vec{B}(M') = -\vec{s}_{xOy}(\vec{B}(M)) = -\vec{s}_{xOy}(B_z(z)\vec{k}) = -B_z(z)\cdot\vec{s}_{xOy}(\vec{k}) = B_z(z)\vec{k}$$

Loi de Biot et Savart :



$$\vec{OP} = \rho \cdot \vec{e}_\rho$$

$$d\vec{P} = d\rho \cdot \vec{e}_\rho + \rho \cdot d\theta \cdot \vec{e}_\theta = R d\theta \cdot \vec{e}_\theta$$

$$\vec{PM} = \vec{PO} + \vec{OM} = -R \cdot \vec{e}_\rho + z \cdot \vec{k}$$

$$\text{Donc } PM^2 = R^2 + z^2$$

$$\text{Ainsi, } \vec{u}_{PM} = \frac{\vec{PM}}{PM} = \frac{-R \cdot \vec{e}_\rho + z \cdot \vec{k}}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

L'élément infinitésimal crée en M un champ :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \times \begin{vmatrix} 0 & R \cdot d\theta \\ R \cdot d\theta & 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -R \\ 0 \\ z \end{vmatrix}}{PM^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\begin{vmatrix} z R d\theta \\ 0 \\ R^2 d\theta \end{vmatrix}}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

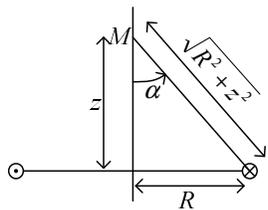
$$\text{Ainsi, } \vec{B}(M) = B_z(z) \vec{k} = \left(\oint_{(C)} d\vec{B}(M) \cdot \vec{k} \right) \vec{k} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{R^2 d\theta}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$\text{Soit } \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \vec{k}$$

et, pour $z = 0$:

$$\vec{B}(0) = \frac{\mu_0 I}{2R} \vec{k}$$

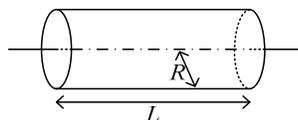
$$\text{Donc } \vec{B}(M) = \vec{B}(0) \left(\frac{R}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right)^3$$



$$\text{Donc } \vec{B}(M) = \sin^3(\alpha) \cdot \vec{B}(0)$$

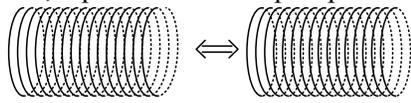
$$\|\vec{B}(M)\| \underset{z \rightarrow +\infty}{\propto} 1/z^3 \text{ (caractéristique de la nature dipolaire du champ } \vec{B} \text{)}$$

C) Champ créé par un solénoïde de longueur L, sur son axe

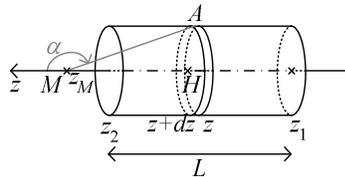


Cylindre de longueur L , rayon R sur lequel on réalise un enroulement serré de N tours de fil parcouru par un courant I .

Cet enroulement équivaut à N spires de même rayon R , parcourues par un même courant I , équidistantes et équiréparties sur la longueur L du solénoïde.



$$\text{Condition : } \frac{L}{N} \ll R, \text{ ou } N \gg \frac{L}{R}.$$



Les $dN_{\text{spires}} = N \frac{dz}{L} = ndz$ spires (n : nombre de spires par unité de longueur)

situées entre les côtes z et $z + dz$ créent en M un champ magnétique :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 \cdot dN_{\text{spires}} I}{2} \times \frac{R^2}{(R^2 + (z - z_M)^2)^{3/2}} \vec{k}$$

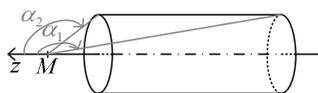
$$\text{Ainsi, } \vec{B}(M) = \int_{z_1}^{z_2} d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 R^2 n I}{2} \times \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{(R^2 + (z - z_M)^2)^{3/2}} \vec{k}$$

$$\text{Soit } \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 R^2 n I}{2 R^2} \times \left[\frac{z - z_M}{\sqrt{R^2 + (z - z_M)^2}} \right]_{z_1}^{z_2} \vec{k}$$

On a :

$$z - z_M = \overline{HM}, \quad \sqrt{R^2 + (z - z_M)^2} = \overline{AM}$$

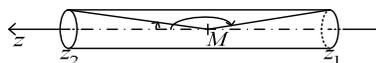
$$\text{Donc } \frac{z - z_M}{\sqrt{R^2 + (z - z_M)^2}} = \cos \alpha, \text{ où } \alpha = (\vec{k}, \overrightarrow{MA}).$$



$$\text{Ainsi, } \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 n I}{2} \times (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \vec{k}$$

Cas particulier :

Pour un solénoïde très long et un point M à l'intérieur, très éloigné des deux faces :



$$\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1 \approx 1 - (-1) = 2$$

$$\text{Donc } \vec{B}(M) \approx \mu_0 n I \vec{k}$$

II Flux du champ magnétique

A) Propriété fondamentale du champ magnétique

Pour une surface fermée S :

$$\phi_S(\vec{B}) = \oiint_S \vec{B}(M) \cdot d\vec{S} = 0$$

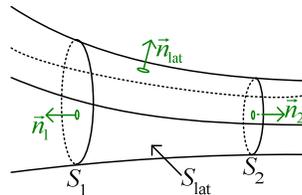
Rappel du théorème de Gauss :

$$\phi_S(\vec{E}) = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Remarque :

En électrostatique, on peut dissocier les charges + des charges - alors qu'en magnéto-statique, on ne peut pas séparer un pôle sud d'un pôle nord. Donc, par analogie avec l'électrostatique pour la charge, on pourrait avoir à la place les pôles, ce qui explique le fait que $\phi_S(\vec{B}) = 0$ (autant de pôles nord que de pôles sud)

B) Tube de champ



$S = S_1 \cup S_2 \cup S_{\text{lat}}$ est une surface fermée.

$$\phi_S(\vec{B}) = 0 \Leftrightarrow \phi_{S_2}(\vec{B}) + \phi_{S_{\text{lat}}}(\vec{B}) + \phi_{S_1}(\vec{B}) = 0$$

En tout point de S_{lat} , \vec{n}_{lat} est perpendiculaire au champ magnétique.

Donc $\phi_{S_{\text{lat}}}(\vec{B}) = 0$

$$\text{Donc } -\phi_{S_1}(\vec{B}) = \phi_{S_2}(\vec{B})$$

$-\phi_{S_1}(\vec{B})$: flux entrant (gauche vers droite)

$\phi_{S_2}(\vec{B})$: flux sortant (gauche vers droite)

On a donc conservation du flux électromagnétique dans un tube de champ.

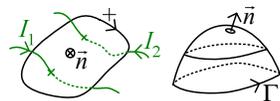
$[\phi] = \text{Wb}$: le Weber.

$$1\text{Wb} = 1\text{T}\cdot\text{m}^2$$

III Circulation de \vec{B} , théorème d'Ampère

A) Théorème d'Ampère

On considère un contour Γ orienté.



Théorème d'Ampère :

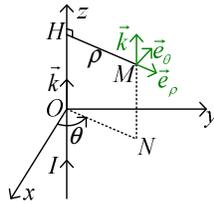
$$C_{\Gamma}(\vec{B}) = \mu_0 I_S \quad (\vec{B} \text{ ne dérive donc pas d'un potentiel, car sinon } C_{\Gamma}(\vec{B}) = 0)$$

$$C_{\Gamma}(\vec{B}) = \oint_{\Gamma} \vec{B}(M) \cdot d\vec{M}, \text{ où } d\vec{M} \text{ est dans le même sens que le sens positif de } \Gamma.$$

Et I_S est la somme algébrique des courants qui traversent S dans le sens positif associé à Γ .

$$\text{Ici, } I_S = I_1 - I_2$$

B) Champ créé par un fil rectiligne infini



1) Symétries

Le plan $(O, \vec{e}_\rho, \vec{k})$ est un plan de symétrie pour $\{I\}$, donc un plan d'antisymétrie pour $\{\vec{B}\}$. Comme M est dans ce plan, $\vec{B}(M)$ est perpendiculaire à $(O, \vec{e}_\rho, \vec{k})$, donc $\vec{B}(M) = B_\theta(\rho, \theta, z)\vec{e}_\theta$.

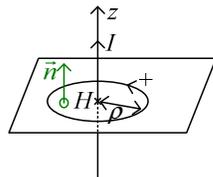
On a une symétrie cylindrique, donc $\frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} = 0$.

La distribution $\{I\}$ est invariante par translation d'axe (Oz), donc $\frac{\partial B_\theta}{\partial z} = 0$.

Donc $\vec{B}(M) = B_\theta(\rho, \theta)\vec{e}_\theta$

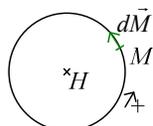
2) Théorème d'Ampère

Contour Γ d'Ampère : cercle de centre $H \in (Oz)$, horizontal et de rayon $\rho > 0$.



Orientation : sens trigonométrique.

Surface : disque S de centre H et de rayon ρ , orienté comme \vec{k} .



$$\delta\mathcal{C} = \vec{B}(M) \cdot d\vec{M} = B_\theta(\rho_M) \vec{e}_\theta \cdot \rho_M d\theta \cdot \vec{e}_\theta = B_\theta(\rho) \times \rho \cdot d\theta$$

$$\text{Donc } C_\Gamma(\vec{B}) = \oint B_\theta(\rho) \rho \cdot d\theta = \int_0^{2\pi} B_\theta(\rho) \rho \cdot d\theta = 2\pi B_\theta(\rho) \rho$$

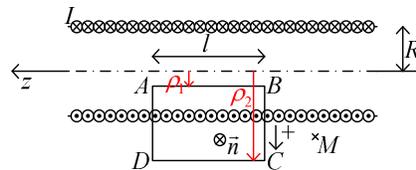
Ici, $I_S = +I$

Donc, d'après le théorème d'Ampère, $2\pi B_\theta(\rho) \rho = \mu_0 I$

$$\text{D'où } B_\theta(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho}, \text{ soit } \boxed{\vec{B}(M) = B_\theta(\rho) \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \vec{e}_\theta}.$$

C) Le solénoïde infini

$\frac{L}{R} \ll N$. On suppose L infini.



Plan de la feuille : un (ou le) plan contenant (Oz et M).

Le plan passant par M et normal à \vec{k} est un plan de symétrie pour $\{I\}$, donc d'antisymétrie pour $\{\vec{B}\}$.

Comme M est dans le plan, $\vec{B}(M)$ est perpendiculaire à ce plan, donc $\vec{B}(M) = B_z(\rho, \theta, z) \vec{k}$.

On a invariance par rotation d'axe (Oz ou translation de direction \vec{k}).

Donc $\vec{B}(M) = B_z(\rho) \vec{k}$.

Les lignes de champ sont donc des droites parallèles à l'axe (Oz).

On considère le contour $\Gamma = ABCDA$, orienté dans le sens horaire.

$$\delta\mathcal{C} = \vec{B}(M) \cdot d\vec{M}$$

- Sur AB :

$$\vec{B}(M) = B_z(\rho_M) \vec{k} = B_z(\rho_1) \vec{k}$$

$$d\vec{M} = \underbrace{d\rho \vec{e}_\rho}_{=0 \text{ car } \rho = \text{cte} = \rho_1} + \underbrace{\rho d\theta \vec{e}_\theta}_{=0 \text{ car plan } \theta = \text{cte}} + dz \vec{k} = dz \vec{k}$$

$$\text{Donc } \delta\mathcal{C} = B_z(\rho_1) dz, \text{ soit } C_{AB}(\vec{B}) = \int_{AB} \delta\mathcal{C} = \int_{z_A}^{z_B} B_z(\rho_1) dz = B_z(\rho_1) \times (-l)$$

- Sur BC :

$$d\vec{M} = d\rho \vec{e}_\rho \perp \vec{B}(M) = B_z(\rho) dz$$

$$\text{Donc } C_{BC}(\vec{B}) = 0$$

- Sur CD :

$$d\vec{M} = dz \vec{k}, \vec{B}(M) = B_z(\rho_2) \vec{k}$$

$$\text{Donc } \delta\mathcal{C} = B_z(\rho_2) dz, \text{ soit } C_{CD}(\vec{B}) = B_z(\rho_2) \times l$$

- Sur DA , on aura, de même que sur BC , $C_{DA}(\vec{B}) = 0$

Donc $C_{\Gamma}(\vec{B}) = [B_z(\rho_1) - B_z(\rho_2)] \times l$

$I_S = - \underbrace{n \times l}_{\substack{\text{nombre de} \\ \text{spires}}} \times I$ pour $\rho_1 < R < \rho_2$

pour $\rho_1, \rho_2 < R$ ou $\rho_1, \rho_2 > R$, $I_S = 0$.

Théorème d'Ampère :

$C_{\Gamma}(\vec{B}) = \mu_0 I_S$

Donc :

$[B_z(\rho_1) - B_z(\rho_2)] \times l = \mu_0 I_S$

Soit $\begin{cases} B_z(\rho_1) = B_z(\rho_2) & \text{si } \rho_1, \rho_2 < R \\ B_z(\rho_2) - B_z(\rho_1) = -\mu_0 n I & \text{si } \rho_1 < R < \rho_2 \\ B_z(\rho_1) = B_z(\rho_2) & \text{si } \rho_1, \rho_2 > R \end{cases}$

Donc $\begin{cases} B_z(\rho) = A \text{ si } \rho < R \\ B_z(\rho) = B \text{ si } \rho > R \end{cases}$, et $B - A = -\mu_0 n I$

Or, pour $\rho = 0$ (c'est à dire pour un point de l'axe (Oz) , à grande distance des extrémités du solénoïde (ici à l'infini), on a $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{k}$

Donc $A = \mu_0 n I$, et $B = 0$

Ainsi, $\vec{B}(M) = \mu_0 n I \vec{k}$ à l'intérieur,
 $= \vec{0}$ à l'extérieur.