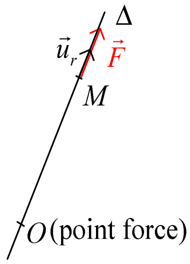
Chapitre 7 : Mouvements à force centrale

I Définition – interaction newtonienne

A) Force centrale

On dit que M est soumis à une force centrale $\vec{F}$ lorsqu'il existe un point O fixe dans (R) galiléen tel que, à chaque instant, $\vec{F} \,//\, \overrightarrow{OM}$ et $\|\vec{F}\|$ ne dépend que de $r = OM$.

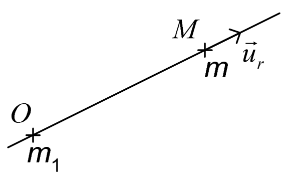


$\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$ (1er vecteur des coordonnées cylindriques)

$\vec{F} = F(r,t) \cdot \vec{u}_r$

B) Interaction newtonienne

1) Interaction gravitationnelle



Loi de Newton : $\vec{F}_{O \to M} = -G \frac{m_1 m}{OM^2} \vec{u}_r$

G : constante de la gravitation $[G] = [\vec{F}] \frac{[OM]^2}{[m_1 m]} = \mathrm{kg}^{-1}\mathrm{m}^3\mathrm{s}^{-2}$

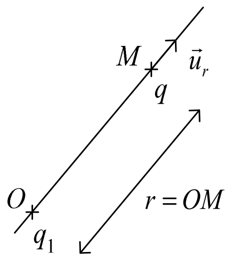
$G = 6{,}67.10^{-11} \mathrm{kg}^{-1}\mathrm{m}^3\mathrm{s}^{-2}$

Si O est fixe dans un référentiel galiléen :

$F(M) = -G \frac{m_1 m}{OM^2} = \frac{-G m_1 m}{r^2}$

La force gravitationnelle est une force centrale (exemple : soleil – planète, planète – satellite)

2) Interaction coulombienne



Force de Coulomb :

$\vec{F}_{O\to M} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1 q}{r^2}\vec{u}_r$ (dans le vide)

où ε_0 est la permittivité électrique du vide

$\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9\,\text{N.m}^2.\text{C}^{-2} = 9.10^9\,\text{kg.m}^3\text{A}^2\text{s}^{-4}$

$\vec{F}_{\text{coulomb}}$ est une force centrale si O est fixe dans (R) galiléen (exemple : proton – électron)

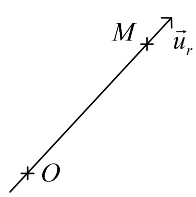
3) Interaction newtonienne

C'est une force s'exprimant sous la forme $\vec{F}_{O\to M} = \dfrac{-k}{r^2}\vec{u}_r$ ($r = OM$)

La force est attractive si $k > 0$, répulsive si $k < 0$.
L'interaction newtonienne est un exemple de force centrale

C) Energie potentielle

On considère une force centrale $\vec{F} = F(r)\vec{u}_r$



Pour un déplacement infinitésimal :

* $d\overrightarrow{OM} = d(r\cdot\vec{u}_r) = dr\cdot\vec{u}_r + r\cdot d\vec{u}_r$

$\vec{u}_r$ unitaire $\Rightarrow \vec{u}_r^2 = 1$

$\Rightarrow d(\vec{u}_r\cdot\vec{u}_r) = 0$

$\Rightarrow 2\vec{u}_r\cdot d(\vec{u}_r) = 0$

$\Rightarrow \vec{u}_r \perp d(\vec{u}_r)$

* $\delta W(\vec{F}) = \vec{F}\cdot d\overrightarrow{OM} = F(r)\vec{u}_r\cdot(dr\cdot\vec{u}_r + r\cdot d\vec{u}_r) = F(r)dr$

On définit U par $\frac{dU}{dr} = -F(r)$ (à une constante additive près)

$\delta W(\vec{F}) = F(r)dr = -dU$. Donc U est l'énergie potentielle dont dérive $\vec{F}$.

La force $\vec{F}$ est donc conservative.

Exemple : interaction newtonienne

$\vec{F} = \frac{-k}{r^2}\vec{u}_r$

U est définie par $\frac{dU}{dr} = -\left(-\frac{k}{r^2}\right) = \frac{k}{r^2}$ donc $U(r) = \frac{-k}{r} + \text{cte} = \frac{-k}{r}$

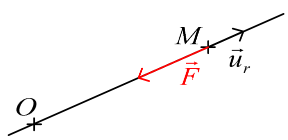
Dans le cas gravitationnel, $U(r) = \frac{-Gm_1m}{r}$

Dans le cas coulombien, $U(r) = \frac{q_1q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

II Lois générales des mouvements à force centrale

A) Conservation du moment cinétique

1) Intégrale première du moment cinétique



On suppose O fixe :

$\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m \cdot \vec{v}_{M/(R)}$

D'après le théorème du moment cinétique appliqué à M en O fixe dans (R) galiléen, on a :

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt}\right|_{(R)} = \vec{M}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

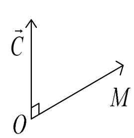
Donc $\vec{\sigma}_O$ est indépendant du temps

$\vec{\sigma}_O = m\vec{C}$ avec $\vec{C} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}_{M/(R)}$, ($\frac{C}{2}$ est la vitesse aréolaire)

$\vec{\sigma}_O$ et $\vec{C}$ sont donc indépendants du temps

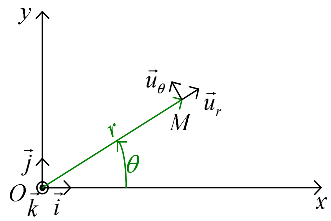
2) Mouvement plan

$\overrightarrow{OM}(t) \perp \vec{\sigma}_O$ ou $\vec{C}$



Donc M décrit un mouvement plan : il appartient au plan contenant O de normale $\vec{C}$ (à tout instant)

Dans le plan de la trajectoire de M :



$(\vec{k} \,//\, \vec{\sigma}_O)$

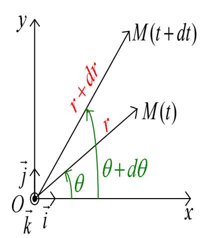
$(\vec{u}_k, \vec{u}_\theta, \vec{k})$ forme une base cylindrique

$$\vec{\sigma}_0 = \overrightarrow{OM} \begin{vmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge m \cdot \vec{v}_{M/(R)} \begin{vmatrix} m \times \dot{r} \\ m \times r\dot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ m \times r^2\dot{\theta} \end{vmatrix}$$

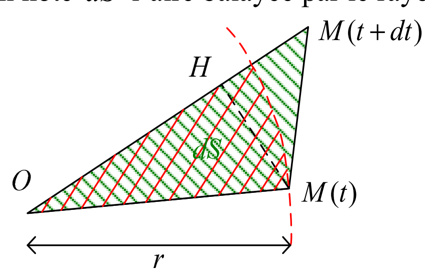
Donc $\vec{\sigma}_0 = m \times r^2\dot{\theta} \cdot \vec{k}$ ou $\vec{C} = r^2\dot{\theta} \cdot \vec{k}$

Donc $r^2\dot{\theta} = C = \text{cte}$

3) Loi des aires



On note dS l'aire balayée par le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ entre t et $t+dt$



$dS = dS + o(r.d\theta) \approx dS$

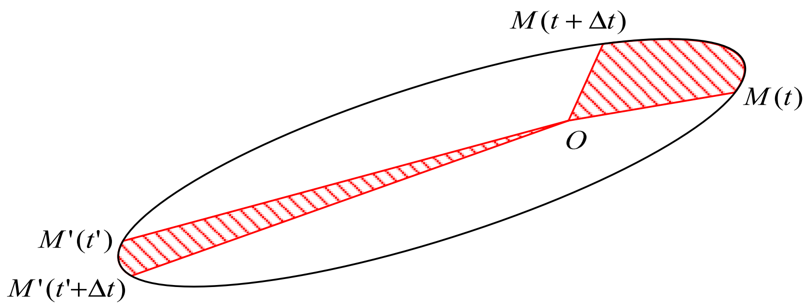
$dS = \pi \times r^2 \times \dfrac{d\theta}{2\pi} = \dfrac{1}{2} r^2 d\theta$

ou $dS \approx \dfrac{1}{2} OM \times MH = \dfrac{1}{2} r \times \underbrace{\text{arc}}_{=rd\theta}$

$dS = \dfrac{1}{2} r^2 d\theta = \dfrac{1}{2} r^2 \dfrac{d\theta}{dt} dt = \dfrac{1}{2} C dt$

Donc $\boxed{\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{1}{2} C}$ (rappel : $\dfrac{C}{2}$, soit $\dfrac{dS}{dt}$ est la vitesse aréolaire)

Le rayon vecteur balaye des aires égales pendant des temps égaux.

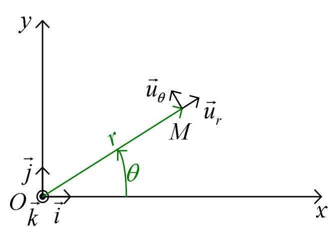


$\Delta S_{t \to t+\Delta t} = \Delta S_{t' \to t'+\Delta t}$

$S = \int dS = \dfrac{1}{2} C \times T$ (T est la période)

B) Formules de Binet

On considère un mouvement à force centrale. Dans le plan de la trajectoire :



$\overrightarrow{OM} = r \cdot \vec{u}_r$

$\vec{v}_{M/(R)} = \dot{r} \cdot \vec{u}_r + r\dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta$

$\dot{r} = \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{dr}{d\theta} \times \dfrac{d\theta}{dt}$ et $\dot{\theta} = \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{C}{r^2}$

On pose $u = \dfrac{1}{r}$. Donc $\dfrac{du}{d\theta} = \dfrac{d(\frac{1}{r})}{dt} \times \dfrac{dt}{d\theta} = \dfrac{-\dot{r}}{r^2} \times \dfrac{dt}{d\theta} = -\dfrac{1}{r^2} \times \dfrac{dr}{d\theta}$

Donc $\dot{r} = -r^2 \dfrac{du}{d\theta} \times \dfrac{C}{r^2} = -C \dfrac{du}{d\theta}$ Et $r\dot{\theta} = \dfrac{C}{r} = Cu$

Donc $\vec{v} = -C\dfrac{du}{d\theta}\cdot\vec{u}_r + Cu\cdot\vec{u}_\theta$ Ou $\boxed{v^2 = C^2\left(\dfrac{du}{dt}\right)^2 + C^2u^2 = C^2\left(\left(\dfrac{du}{dt}\right)^2 + u^2\right)}$

1ère formule de Binet, ou formule de Binet relative au module de la vitesse. On peut ainsi accéder à v^2 directement en connaissant la trajectoire.

$$\vec{a}_{M/(R)} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta$$
$$= \frac{\vec{F}}{m}$$

Comme $\vec{F}$ est une force centrale, sa composante selon $\vec{u}_\theta$ est nulle

Donc $2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0$

Donc $\vec{a}_{M/(R)} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\times\frac{d\dot{r}}{d\theta} = \dot{\theta}\times\frac{d}{d\theta}(-C\frac{du}{d\theta}) = -C\dot{\theta}\frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{C^2}{r^2}\frac{d^2u}{d\theta^2} = -C^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

$$r\dot{\theta}^2 = \frac{r^4\dot{\theta}^2}{r^3} = C^2u^3$$

Donc $\vec{a}_{M/(R)} = (-C^2u^2\dfrac{d^2u}{d\theta^2} - C^2u^3)\cdot\vec{u}_r$

Ou $\boxed{\vec{a}_{M/(R)} = -C^2u^2(u + \dfrac{d^2u}{d\theta^2})\cdot\vec{u}_r}$

2ème formule de Binet (ou formule de Binet relative à l'accélération)

C) Conservation de l'énergie mécanique

$\vec{F} = F(r)\vec{u}_r$ dérive d'une énergie potentielle U définie par $\dfrac{dU}{dr} = -F(r)$

Donc $E_{\text{méca}} = \dfrac{1}{2}mv^2 + U(r)$ est une constante du mouvement

($E_{\text{méca}} = E_{\text{méca}_0} = \dfrac{1}{2}mv_0^2 + U(r_0)$)

III Energie potentielle effective (ou efficace)

A) Définition

$$E_{\text{méca}} = \frac{1}{2}mv^2 + U(r)$$

$$\vec{v}_{M/(R)} = \dot{r}\cdot\vec{u}_r + r\dot{\theta}\cdot\vec{u}_\theta \Rightarrow v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = \dot{r}^2 + r^2\left(\frac{C}{r^2}\right)^2 = \dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2}$$

Donc $E_{\text{méca}} = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\left(\dfrac{1}{2}m\dfrac{C^2}{r^2} + U(r)\right)}_{U_{\text{eff}}(r)} = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) \rightarrow$ un seul paramètre r.

B) Mouvements liés et mouvements de diffusion

Une fois connues les conditions initiales, on a :

$C = r^2\dot{\theta} = r_0^2\dot{\theta}_0$

$E_{\text{méca}} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) = E_{\text{méca}}(0)$

Donc $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = E_{\text{méca}} - U_{\text{eff}}(r) \geq 0$

Donc $U_{\text{eff}}(r) \leq E_{\text{méca}}$

Il y a donc des contraintes sur le mouvement de M

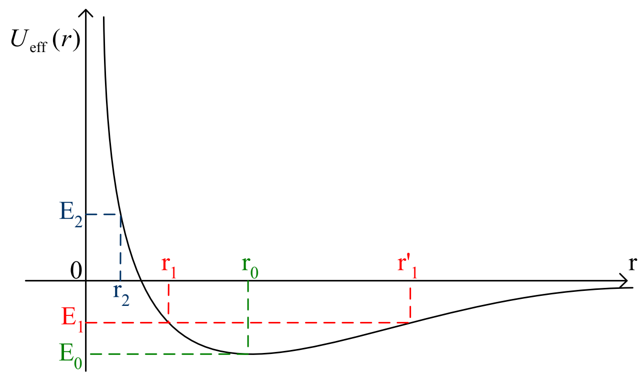
Cas particulier :

On suppose la force centrale newtonienne $F(r) = -\frac{k}{r^2}$. Donc $U(r) = -\frac{k}{r}$

Donc $U_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r} - \frac{k}{r}$

- si $k > 0$ (attractif)

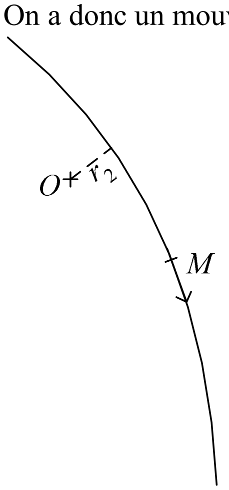
$\lim\limits_{r\to 0} U_{\text{eff}}(r) = +\infty$; $\lim\limits_{r\to +\infty} U_{\text{eff}}(r) = 0^-$



1^er^ cas : $E_{\text{méca}} = E_2 > 0$

$U_{\text{eff}}(r) \leq E_2 \Leftrightarrow r \geq r_2$

On a donc un mouvement de diffusion : M peut s'éloigner à l'infini du point force.

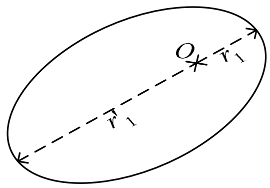


Exemple : certaines comètes ou sondes Voyager

$2^{\text{ème}}$ cas : $E_{\text{méca}} = E_1 \in \left]E_0 ;0\right[$

$U_{\text{eff}}(r) \le E_1 \Leftrightarrow r_1 \le r \le r'_1$

On a donc un mouvement borné (ou lié)



Exemple : planètes autour du soleil,
mouvement de l'électron autour du proton

$3^{\text{ème}}$ cas : $E_{\text{méca}} = E_0$

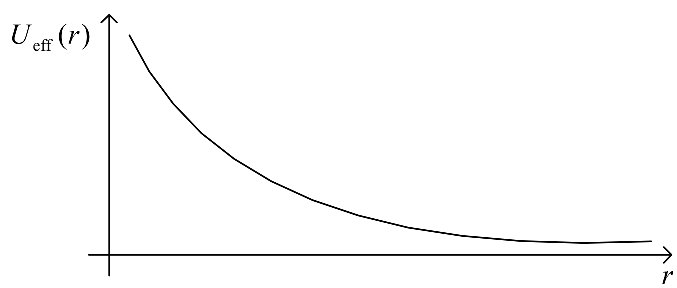
$U_{\text{eff}}(r) \le E_0 \Leftrightarrow r = r_0$

On a donc un mouvement circulaire et $C = r^2\dot{\theta} = r_0^2\dot{\theta}_0 \Rightarrow \dot{\theta} = \text{cte} = \dot{\theta}_0$

Le mouvement est donc circulaire uniforme.

- Si $k < 0$ (répulsif)

$U_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r} - \frac{k}{r} > 0$



Donc $E_{\text{méca}} > 0$ et on a un mouvement de diffusion quelle que soit cette énergie mécanique.