

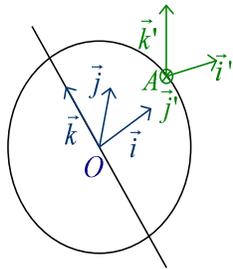
# Chapitre 9 : Changement de référentiels

## I Mouvement d'un référentiel par rapport à un autre

### A) Équivalence référentiel – solide

Référentiel  $(R) = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  où  $O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  sont fixes dans  $(R)$ . On a l'équivalence référentiel – solide : on peut lier un référentiel à un solide, et un référentiel peut être considéré comme un solide.

Exemple : Le solide Terre, référentiel terrestre ou du laboratoire.



$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  sont fixes par rapport à la Terre. Tout point fixe de la terre peut être pris comme repère (avec un triplet de vecteurs formant une base orthonormée directe)

$$\left. \begin{aligned} (R_T) &= (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \\ &= (A, \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}') \end{aligned} \right\} \text{m\^eme r\^ef\^erentiel}$$

## B) Cas particuliers de mouvements d'un référentiel par rapport à un autre

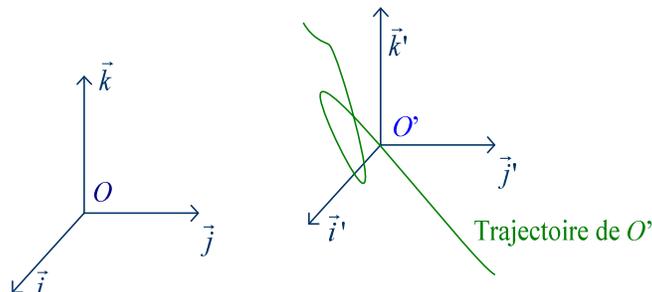
### 1) Mouvement de translation

Soient deux référentiels  $(R) = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ,  $(R') = (O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$

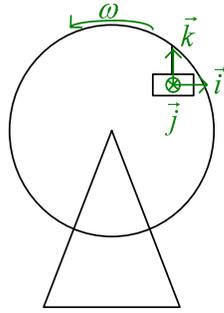
$(R')$  est en translation par rapport à  $(R)$  si, et seulement si :

Tous les vecteurs fixes de  $(R')$  sont fixes dans  $(R)$  et inversement.

Remarque : on peut choisir alors  $(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$  comme repère de  $(R')$ .



Exemple : référentiel lié à une cabine de grande roue.



Ce référentiel est en translation par rapport au référentiel terrestre.

$$\vec{A} = A_x(t) \cdot \vec{i} + A_y(t) \cdot \vec{j} + A_z(t) \cdot \vec{k}$$

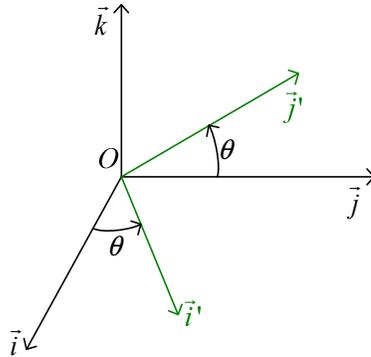
$$\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{(R)} = \dot{A}_x \cdot \vec{i} + A_x \underbrace{\left. \frac{d\vec{i}}{dt} \right|_{(R)}}_{=0} + \dot{A}_y \cdot \vec{j} + \dot{A}_z \cdot \vec{k}$$

$$\text{et } \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{(R')} = \dot{A}_x \cdot \vec{i} + A_x \underbrace{\left. \frac{d\vec{i}}{dt} \right|_{(R')}}_{=0} + \dot{A}_y \cdot \vec{j} + \dot{A}_z \cdot \vec{k}$$

Donc  $\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{(R)} = \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{(R')}$  si  $(R)$  et  $(R')$  sont en translation l'un par rapport à l'autre.

## 2) Rotation uniforme autour d'un axe fixe

On prend un axe  $\Delta = (O, \vec{k})$  fixe dans  $(R)$  et  $(R')$ .

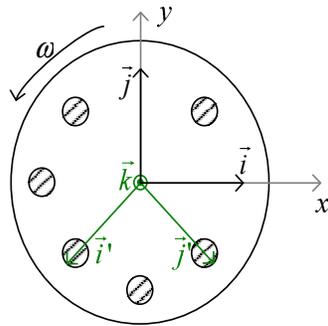


$$(R) = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}), (R') = (O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$$

$$\theta = (\vec{i}, \vec{i}') = (\vec{j}, \vec{j}')$$

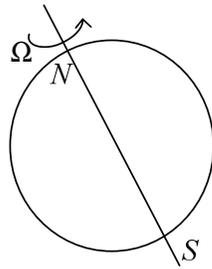
$\theta$  est une fonction affine du temps  $\Leftrightarrow \dot{\theta} = \omega = \text{cte}$ . On parle dans ce cas de rotation uniforme autour d'un axe fixe ( $\Delta$ )

Exemple : manège



$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est fixe par rapport au manège,  $\omega = \text{cte}$

Autre exemple : référentiel géocentrique terrestre en rotation par rapport au référentiel géocentrique



$$\Omega = \frac{2\pi}{T} \quad T = 23\text{h}56\text{min}4\text{s}$$

Rotation autour de l'axe  $(SN)$  dans le sens trigonométrique associé à  $\vec{SN}$

Retour au cas général :

$$\vec{i}' = \vec{i} \cos \theta + \vec{j} \sin \theta$$

$$\vec{j}' = -\vec{i} \sin \theta + \vec{j} \cos \theta$$

$$\vec{k} = \vec{k}'$$

On a donc :

$$\left. \frac{d\vec{i}'}{dt} \right|_{(R)} = \vec{i} \frac{d \cos \theta}{dt} + \underbrace{\left. \frac{d\vec{i}}{dt} \right|_{(R)}}_{=\vec{0}} \cos \theta + \vec{j} \frac{d \sin \theta}{dt} = -\dot{\theta} \sin \theta \cdot \vec{i} + \dot{\theta} \cos \theta \cdot \vec{j} = \dot{\theta} \cdot \vec{j}'$$

$$\left. \frac{d\vec{j}'}{dt} \right|_{(R)} = -\dot{\theta} \cos \theta \cdot \vec{i} - \dot{\theta} \sin \theta \cdot \vec{j} = -\dot{\theta} \cdot \vec{i}'$$

$$\left. \frac{d\vec{k}}{dt} \right|_{(R)} = \vec{0}$$

On a :

$$\dot{\theta} \cdot \vec{k} \wedge \vec{i}' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & (\vec{i}') \\ 0 \wedge 0 & (\vec{j}') & \\ \dot{\theta} & 0 & (\vec{k}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{\theta} & \dot{\theta} \cdot \vec{j}' \\ & \end{vmatrix} = \frac{d\vec{i}'}{dt} \Big|_{(R)}$$

$$\dot{\theta} \cdot \vec{k} \wedge \vec{j}' = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\dot{\theta} \\ 0 \wedge 1 & & \\ \dot{\theta} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -\dot{\theta} \cdot \vec{i}' \\ & \end{vmatrix} = \frac{d\vec{j}'}{dt} \Big|_{(R)}$$

$$\dot{\theta} \cdot \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0} = \frac{d\vec{k}}{dt} \Big|_{(R)}$$

Définition :

$\vec{\omega}_{R'/R} (= \vec{\omega}) = \dot{\theta} \cdot \vec{k}$ , vecteur rotation du référentiel  $(R')$  par rapport à  $(R)$

Direction : axe de rotation

Module :  $|\dot{\theta}|$ , vitesse angulaire de rotation

Sens : tel que  $(R')$  tourne dans le sens trigonométrique associé à  $\vec{\omega}$

$$\text{Ainsi, } \frac{d\vec{i}'}{dt} \Big|_{(R)} = \vec{\omega} \wedge \vec{i}'; \quad \frac{d\vec{j}'}{dt} \Big|_{(R)} = \vec{\omega} \wedge \vec{j}'; \quad \frac{d\vec{k}}{dt} \Big|_{(R)} = \vec{\omega} \wedge \vec{k}$$

Application :

$$\vec{A} = A_x(t) \cdot \vec{i}' + A_y(t) \cdot \vec{j}' + A_z(t) \cdot \vec{k}$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} \Big|_{(R')} = \dot{A}_x \cdot \vec{i}' + A_x \underbrace{\frac{d\vec{i}'}{dt} \Big|_{(R')}}_{= \vec{0} \text{ car } \vec{i}' \text{ fixe dans } (R)} + \dot{A}_y \cdot \vec{j}' + A_y \frac{d\vec{j}'}{dt} \Big|_{(R)} + \dot{A}_z \cdot \vec{k} + A_z \frac{d\vec{k}}{dt} \Big|_{(R)}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{A}}{dt} \Big|_{(R)} &= \dot{A}_x \cdot \vec{i}' + A_x \frac{d\vec{i}'}{dt} \Big|_{(R)} + \dot{A}_y \cdot \vec{j}' + A_y \frac{d\vec{j}'}{dt} \Big|_{(R)} + \dot{A}_z \cdot \vec{k} + A_z \frac{d\vec{k}}{dt} \Big|_{(R)} \\ &= \frac{d\vec{A}}{dt} \Big|_{(R')} + \vec{\omega} \wedge (A_x \cdot \vec{i}' + A_y \cdot \vec{j}' + A_z \cdot \vec{k}) \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{A}}{dt} \Big|_{(R)} = \frac{d\vec{A}}{dt} \Big|_{(R')} + \vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{A}}$$

$$\text{Si } A \text{ est fixe dans } (R'), \quad \frac{d\vec{A}}{dt} \Big|_{(R)} = \vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{A}$$

## II Transformation des grandeurs cinématiques

### A) Définition

$$(R) = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}), (R') = (O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$$

On considère un point matériel  $M$ .

$$\text{On pose } \overrightarrow{OM} = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}, \quad \overrightarrow{O'M} = x'(t) \cdot \vec{i}' + y'(t) \cdot \vec{j}' + z'(t) \cdot \vec{k}'$$

On a alors :

$$\vec{v}_{M/(R)} = \left. \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right|_{(R)} = \dot{x} \cdot \vec{i} + \dot{y} \cdot \vec{j} + \dot{z} \cdot \vec{k}$$

$$\vec{v}_{M/(R')} = \left. \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right|_{(R')} = \dot{x}' \cdot \vec{i}' + \dot{y}' \cdot \vec{j}' + \dot{z}' \cdot \vec{k}'$$

$$\vec{a}_{M/(R)} = \left. \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \right|_{(R)} = \ddot{x} \cdot \vec{i} + \ddot{y} \cdot \vec{j} + \ddot{z} \cdot \vec{k}$$

$$\vec{a}_{M/(R')} = \left. \frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2} \right|_{(R')} = \ddot{x}' \cdot \vec{i}' + \ddot{y}' \cdot \vec{j}' + \ddot{z}' \cdot \vec{k}'$$

( $O$  et  $O'$  sont fixes respectivement dans  $(R)$  et  $(R')$ )

### B) Formule de transformation de la vitesse

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right|_{(R)} &= \left. \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} \right|_{(R)} + \left. \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right|_{(R)} \\ &= \vec{v}_{O'/(R)} + \dot{x}' \cdot \vec{i} + x' \left. \frac{d\vec{i}'}{dt} \right|_{(R)} + \dot{y}' \cdot \vec{j} + y' \left. \frac{d\vec{j}'}{dt} \right|_{(R)} + \dot{z}' \cdot \vec{k} + z' \left. \frac{d\vec{k}'}{dt} \right|_{(R)} \\ &= \dot{x}' \cdot \vec{i} + \dot{y}' \cdot \vec{j} + \dot{z}' \cdot \vec{k} + \vec{v}_{O'/(R)} + x' \left. \frac{d\vec{i}'}{dt} \right|_{(R)} + y' \left. \frac{d\vec{j}'}{dt} \right|_{(R)} + z' \left. \frac{d\vec{k}'}{dt} \right|_{(R)} \end{aligned}$$

$$\underbrace{\vec{v}_{M/(R)}}_{\text{vitesse absolue}} = \underbrace{\vec{v}_{M/(R')}}_{\text{vitesse relative}} + \underbrace{\vec{v}_{O'/(R)} + x' \left. \frac{d\vec{i}'}{dt} \right|_{(R)} + y' \left. \frac{d\vec{j}'}{dt} \right|_{(R)} + z' \left. \frac{d\vec{k}'}{dt} \right|_{(R)}}_{\text{vitesse d'entraînement de } R'/R \text{ en } M \text{ à } t}$$

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$$

Interprétation physique de  $\vec{v}_e$  :

On note  $P$  le point, fixe dans  $(R')$ , qui coïncide avec  $M$  à  $t_0$ .

Notation :  $P = M$  à  $t_0 \in R'$

A tout instant  $t$ ,  $\overrightarrow{OP}(t) = \overrightarrow{OO'}(t) + \overrightarrow{O'P}(t)$

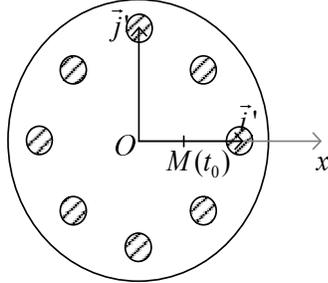
Or  $\overrightarrow{O'P} = x'(t_0) \cdot \vec{i} + y'(t_0) \cdot \vec{j} + z'(t_0) \cdot \vec{k}$

(Car  $P$  est fixe dans  $(R')$  et  $P(t_0) = M(t_0)$ )

$$\text{Donc } \vec{v}_{P/(R)} = \left. \frac{d\vec{OP}}{dt} \right|_{(R)} = \vec{v}_{O'/(R)} + x'(t_0) \left. \frac{d\vec{i}'}{dt} \right|_{(R)} + y'(t_0) \left. \frac{d\vec{j}'}{dt} \right|_{(R)} + z'(t_0) \left. \frac{d\vec{k}'}{dt} \right|_{(R)}$$

Ainsi, à  $t = t_0$ ,  $\vec{v}_{P/(R)}(t_0) = \vec{v}_e$  (de  $R'/R$  en  $M$  à  $t_0$ )

Exemple : mouvement rectiligne uniforme dans le référentiel lié à un manège tournant à une vitesse angulaire  $\omega = \text{cte}$

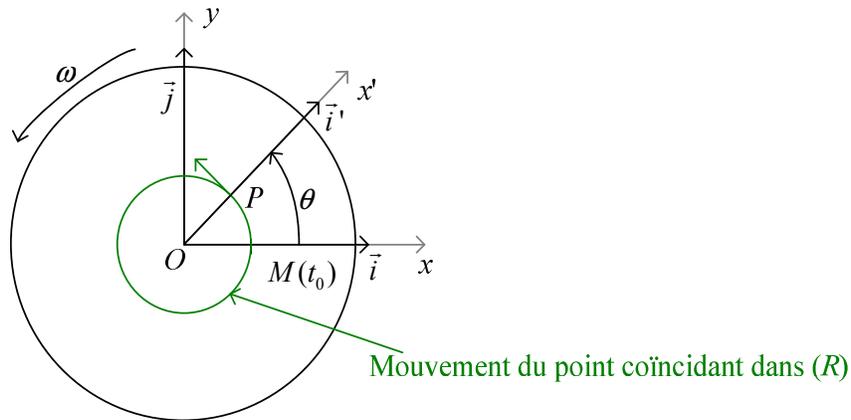


$M$  se déplace sur  $(Ox')$  à vitesse constante.

$$\vec{OM} = x' \cdot \vec{i}' = a \times t \cdot \vec{i}', \text{ où } a = \text{cte}$$

$P = M$  à  $t_0 \in R'$

$$\text{Donc } \vec{OP} = a \times t_0 \cdot \vec{i}'; \quad \vec{v}_{P/(R)} = a \times t_0 \cdot \underbrace{\left. \frac{d\vec{i}'}{dt} \right|_{(R)}}_{=\dot{\theta} \cdot \vec{j} = \omega \cdot \vec{j}}$$



$$\vec{v}_r = \vec{v}_{M/(R')} = a \cdot \vec{i}' \text{ (Vitesse constante car mouvement rectiligne uniforme)}$$

$$\text{Donc } \vec{v}_{M/(R)}(t_0) = a \cdot \vec{i}' + a \cdot t_0 \cdot \omega \cdot \vec{j}'$$

Vérification :

Dans  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ,  $M$  a pour coordonnées polaires  $(\rho = OM; \theta = (\vec{i}, \vec{OM}) = \omega t (+\text{cte}))$

$$\text{Donc } \vec{v}_{M/(R)} = \dot{\rho} \cdot \vec{u}_\rho + \rho \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta = a \cdot \underbrace{\vec{u}_\rho}_{\vec{i}'} + a \times t \cdot \omega \cdot \underbrace{\vec{u}_\theta}_{\vec{j}'}$$

### C) Transformation de l'accélération

$$\begin{aligned}
 \vec{a}_{M/(R)} &= \left. \frac{d\vec{v}_{M/(R)}}{dt} \right|_{(R)} \\
 &= \frac{d}{dt} \left( \left. \frac{d\vec{OO}'}{dt} \right|_{(R)} + \dot{x}' \cdot \vec{i}' + \dot{y}' \cdot \vec{j}' + \dot{z}' \cdot \vec{k}' + x' \left. \frac{d\vec{i}'}{dt} \right|_{(R)} + y' \left. \frac{d\vec{j}'}{dt} \right|_{(R)} + z' \left. \frac{d\vec{k}'}{dt} \right|_{(R)} \right) \\
 &= \vec{a}_{O'/(R)} + \dot{x}' \cdot \vec{i}' + \dot{y}' \cdot \vec{j}' + \dot{z}' \cdot \vec{k}' + \left( \dot{x}' \left. \frac{d\vec{i}'}{dt} \right|_{(R)} + \dot{y}' \left. \frac{d\vec{j}'}{dt} \right|_{(R)} + \dot{z}' \left. \frac{d\vec{k}'}{dt} \right|_{(R)} \right) \\
 &\quad + \left( \dot{x}' \left. \frac{d\vec{i}'}{dt} \right|_{(R)} + \dot{y}' \left. \frac{d\vec{j}'}{dt} \right|_{(R)} + \dot{z}' \left. \frac{d\vec{k}'}{dt} \right|_{(R)} \right) + \left( x' \left. \frac{d^2 \vec{i}'}{dt^2} \right|_{(R)} + y' \left. \frac{d^2 \vec{j}'}{dt^2} \right|_{(R)} + z' \left. \frac{d^2 \vec{k}'}{dt^2} \right|_{(R)} \right) \\
 &= \vec{a}_{M/(R')} + 2 \left( \dot{x}' \left. \frac{d\vec{i}'}{dt} \right|_{(R)} + \dot{y}' \left. \frac{d\vec{j}'}{dt} \right|_{(R)} + \dot{z}' \left. \frac{d\vec{k}'}{dt} \right|_{(R)} \right) + \vec{a}_{O'/(R)} \\
 &\quad + \left( x' \left. \frac{d^2 \vec{i}'}{dt^2} \right|_{(R)} + y' \left. \frac{d^2 \vec{j}'}{dt^2} \right|_{(R)} + z' \left. \frac{d^2 \vec{k}'}{dt^2} \right|_{(R)} \right)
 \end{aligned}$$

Rappel :  $P = M$  à  $t_0 \in R'$

$$\vec{O}'\vec{P} = \vec{O}'\vec{O}' + x'(t_0) \cdot \vec{i}' + y'(t_0) \cdot \vec{j}' + z'(t_0) \cdot \vec{k}'$$

$$\text{Donc } \vec{a}_{P/(R)}(t) = \vec{a}_{O'/(R)}(t) + x'(t_0) \left. \frac{d^2 \vec{i}'}{dt^2} \right|_{(R)}(t) + y'(t_0) \left. \frac{d^2 \vec{j}'}{dt^2} \right|_{(R)}(t) + z'(t_0) \left. \frac{d^2 \vec{k}'}{dt^2} \right|_{(R)}(t)$$

Ainsi, à  $t = t_0$  :

$$\begin{aligned}
 \vec{a}_{P/(R)}(t_0) &= \vec{a}_{O'/(R)}(t_0) + x'(t_0) \left. \frac{d^2 \vec{i}'}{dt^2} \right|_{(R)}(t_0) + y'(t_0) \left. \frac{d^2 \vec{j}'}{dt^2} \right|_{(R)}(t_0) + z'(t_0) \left. \frac{d^2 \vec{k}'}{dt^2} \right|_{(R)}(t_0) \\
 &= \vec{a}_e \text{ (de } R'/R \text{ en } M \text{ à } t_0)
 \end{aligned}$$

(Accélération d'entraînement de  $R'/R$  en  $M$  à  $t_0$ )

$$\text{Donc } \vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

$$\| \quad \| \quad \|$$

$$\vec{a}_{M/(R)} \quad \vec{a}_{M/(R')} \quad \vec{a}_{P/(R)}$$

$$\text{Avec } \vec{a}_c = 2\dot{x}' \left. \frac{d\vec{i}'}{dt} \right|_{(R)} + 2\dot{y}' \left. \frac{d\vec{j}'}{dt} \right|_{(R)} + 2\dot{z}' \left. \frac{d\vec{k}'}{dt} \right|_{(R)} : \text{accélération complémentaire ou de}$$

Coriolis.

### III Mouvements de translation et de rotation uniforme par rapport à un axe fixe

#### A) Mouvement de translation

##### 1) Transformation des vitesses

$$\vec{v}_e = \vec{v}_{O'(R)} + \underbrace{x' \frac{d\vec{i}'}{dt} \Big|_{(R)} + y' \frac{d\vec{j}'}{dt} \Big|_{(R)} + z' \frac{d\vec{k}'}{dt} \Big|_{(R)}}_{=\vec{0} \text{ car } \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \text{ fixes dans } (R)}$$

Donc  $\vec{v}_e = \vec{v}_{O'(R)}(t)$  (indépendant de  $M$ )

$$\text{Donc } \boxed{\vec{v}_{M/(R)} = \vec{v}_{M/(R')} + \vec{v}_{O'(R)}}$$

Cas particulier : si  $M$  est fixe dans  $(R')$ ,  $\vec{v}_{M/(R')} = \vec{0}$  et  $\vec{v}_{M/(R)} = \vec{v}_{O'(R)}$

Ainsi, dans un mouvement de translation, tous les points fixes de  $(R')$  ont la même vitesse dans  $(R)$ .

##### 2) Transformation de l'accélération

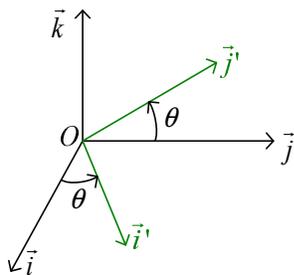
$$\vec{a}_e = \vec{a}_{O'(R)} + \underbrace{x' \frac{d^2\vec{i}'}{dt^2} \Big|_{(R)} + y' \frac{d^2\vec{j}'}{dt^2} \Big|_{(R)} + z' \frac{d^2\vec{k}'}{dt^2} \Big|_{(R)}}_{=\vec{0} \text{ car } \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \text{ fixes dans } (R)} = \vec{a}_{O'(R)}$$

$$\vec{a}_c = 2x' \frac{d\vec{i}'}{dt} \Big|_{(R)} + 2y' \frac{d\vec{j}'}{dt} \Big|_{(R)} + 2z' \frac{d\vec{k}'}{dt} \Big|_{(R)} = \vec{0}$$

$$\text{Donc } \boxed{\vec{a}_{M/(R)} = \vec{a}_{M/(R')} + \vec{a}_{O'(R)}}$$

Si  $M$  est fixe dans  $(R')$ ,  $\vec{a}_{M/(R')} = \vec{a}_{O'(R)}$ . Ainsi, tout les points fixes de  $(R')$  on la même accélération dans  $(R)$ .

#### B) Rotation uniforme autour d'un axe fixe



$$\theta = \omega t ; \vec{\omega}_{R'/R} = \vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{k}$$

$$(R) = (0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) ; (R') = (0, \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$$

## 1) Transformation des vitesses

$$\vec{v}_e = \underbrace{\vec{v}_{O'/(R)}}_{=0} + x' \frac{d\vec{i}'}{dt} \Big|_{(R)} + y' \frac{d\vec{j}'}{dt} \Big|_{(R)} + z' \frac{d\vec{k}'}{dt} \Big|_{(R)}$$

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} \Big|_{(R)} = \vec{\omega} \wedge \vec{i}'; \quad \frac{d\vec{j}'}{dt} \Big|_{(R)} = \vec{\omega} \wedge \vec{j}'; \quad \frac{d\vec{k}'}{dt} \Big|_{(R)} = \vec{\omega} \wedge \vec{k}'$$

$$\text{Donc } \vec{v}_e = \vec{\omega} \wedge (x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}') = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

$$\text{Donc } \boxed{\vec{v}_{M/(R)} = \vec{v}_{M/(R')} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}}$$

Rappel :

$$\frac{d\vec{A}}{dt} \Big|_{(R)} = \frac{d\vec{A}}{dt} \Big|_{(R')} + \vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{A} \text{ avec } \vec{A} = \overrightarrow{OM} \text{ donnait directement la formule.}$$

## 2) Transformation des accélérations

$$\vec{a}_e = \underbrace{\vec{a}_{O'/(R)}}_{=0} + x' \frac{d^2\vec{i}'}{dt^2} \Big|_{(R)} + y' \frac{d^2\vec{j}'}{dt^2} \Big|_{(R)} + z' \frac{d^2\vec{k}'}{dt^2} \Big|_{(R)}$$

$$\frac{d^2\vec{i}'}{dt^2} \Big|_{(R)} = \frac{d(\vec{\omega} \wedge \vec{i}')}{dt} \Big|_{(R)} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \Big|_{(R)} \wedge \vec{i}' + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{i}'}{dt} \Big|_{(R)} = \vec{0} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{i}')$$

Ainsi, en procédant de même avec  $\vec{j}'$  et  $\vec{k}'$  :

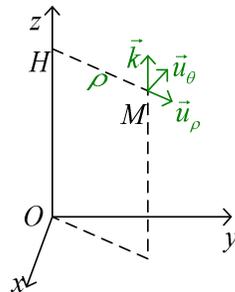
$$\vec{a}_e = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}')) = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM})$$

$$\vec{a}_c = 2x' \frac{d\vec{i}'}{dt} \Big|_{(R)} + 2y' \frac{d\vec{j}'}{dt} \Big|_{(R)} + 2z' \frac{d\vec{k}'}{dt} \Big|_{(R)} = 2\vec{\omega} \wedge (x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}') = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{M/(R')}$$

$$\text{Donc } \boxed{\vec{a}_{M/(R)} = \vec{a}_{M/(R')} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{M/(R')}}}$$

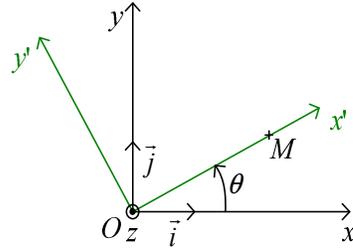
$$\overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \begin{vmatrix} 0 & x & -\omega \times y \\ 0 & y & \omega \times x \\ \omega & z & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{Donc } \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}) = \begin{vmatrix} 0 & -\omega \times y & x \\ 0 & \omega \times x & -\omega^2 y \\ \omega & 0 & 0 \end{vmatrix}$$



$$\text{Ainsi, } \vec{a}_e = -\omega^2 \overrightarrow{HM} = -\omega^2 \rho \vec{u}_\rho$$

Application : mouvement rectiligne uniforme sur un manège



$$\theta = \omega t$$

$(R_T)$  : référentiel terrestre  $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$(R')$  : référentiel du manège  $(0, \vec{i}', \vec{j}', \vec{k})$

$$\begin{cases} x' = at \\ y' = 0 \\ z' = 0 \end{cases}$$

$$\vec{a}_r = \vec{a}_{M/(R')} = \ddot{x} \vec{i}' = \vec{0}$$

$$\vec{a}_e = -\omega^2 \overrightarrow{OM} = -\omega^2 a \times t \vec{i}'$$

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{M/(R')} = 2\omega \vec{k} \wedge a t \vec{i}' = 2a\omega \vec{j}'$$

$$\text{Donc } \vec{a}_{M/(R)} = -\omega^2 a \times t \vec{i}' + 2a\omega \vec{j}'$$

Vérification :

En coordonnées polaires :  $\rho = OM = at$  ;  $\theta = (\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = \omega t$  ;  $z = 0$

$$\vec{u}_\rho = \vec{i}' ; \vec{u}_\theta = \vec{j}'$$

Donc

$$\begin{aligned} \vec{a}_{M/(R)} &= (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \vec{u}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}) \vec{u}_\theta \\ &= (0 - at\omega^2) \vec{u}_\rho + (2a\omega + 0) \vec{u}_\theta \\ &= -\omega^2 a \times t \vec{u}_\rho + 2a\omega \vec{u}_\theta \end{aligned}$$