This work is licensed under a Creative Commons "Attribution-ShareAlike 4.0 International" license.

Chapitre 7 : Bilans énergétiques

I Transformation d'un système obéissant à l'une des lois de Joule

A) Système satisfaisant la 1ère loi de Joule

En particulier, le gaz parfait vérifie la 1ère loi de Joule.
Soit une transformation quasi-statique d'un état initial 1 vers un état final 2.

Pour une étape infinitésimale de la transformation :

$$dU = \left.\frac{\partial U}{\partial T}\right|_V dT + \underbrace{\left.\frac{\partial U}{\partial V}\right|_T}_{=0} dV = C_V dT \Rightarrow \Delta U = U_2 - U_1 = \int_{T_1}^{T_2} C_V dT$$

Pour une transformation quelconque, on a aussi $\Delta U = U_2 - U_1 = \int_{T_1}^{T_2} C_V dT$ (il suffit de prendre une transformation quasi-statique qui a même état initial et même état final).

B) Système satisfaisant la 2nde loi de Joule

Le gaz parfait vérifie aussi la 2nde loi de Joule.
Soit une transformation quasi-statique d'un état initial 1 vers un état final 2.

Pour une étape infinitésimale de la transformation :

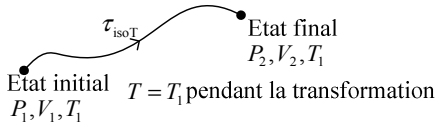
$$dH = \left.\frac{\partial H}{\partial T}\right|_P dT + \underbrace{\left.\frac{\partial H}{\partial V}\right|_T}_{=0} dV = C_P dT \Rightarrow \Delta H = H_2 - H_1 = \int_{T_1}^{T_2} C_P dT$$

Pour une transformation quelconque, on a aussi $\Delta H = \int_{T_1}^{T_2} C_P dT (= \Delta H_{\tau_{QS}})$

II Transformation réversible d'un gaz parfait

A) Transformation isotherme réversible

On considère n moles d'un gaz parfait



Pour que la transformation soit isotherme et réversible, elle doit être très lente.
Pour une transformation infinitésimale : $\delta W = -PdV$ (réversibilité). Puisque la transformation est quasi-statique, on a, pendant toute la transformation, $P = \frac{nRT}{V}$.

Ismaël Bouya http://melusine.eu.org/syracuse/immae/

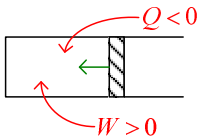
Donc $\delta W = -nRT\dfrac{dV}{V} \Rightarrow W = \int_1^2 -nRT\dfrac{dV}{V} = -nRT \times \ln\left(\dfrac{V_2}{V_1}\right)$

$W = -nRT\ln a$ avec $a = \dfrac{V_1}{V_2}(=\dfrac{P_2}{P_1})$, rapport volumétrique de la transformation

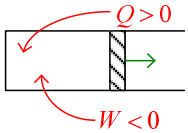
$\Delta U = U_2 - U_1 = U(T_1) - U(T_2) = 0$

D'après le premier principe, $\Delta U = Q + W$. Donc $Q = -W = nRT_1 \ln a$.

Pour une compression, $a = \dfrac{V_2}{V_1} < 1$.

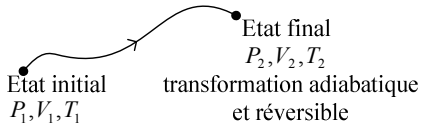


Pour une détente, $a = \dfrac{V_2}{V_1} > 1$.



B) Transformation adiabatique réversible

On considère n moles d'un gaz parfait



Pour que la transformation soit adiabatique et réversible, il faut qu'elle soit assez lente (réversibilité), mais suffisamment rapide pour être adiabatique.

1) Loi de Laplace

Pour une étape infinitésimale de la transformation, $dU = nC_{m,V}dT$ (1ère loi de Joule et quasi-staticité). On a :

$C_{m,V} = \dfrac{R}{\gamma - 1}$, et, d'après le premier principe, $dU = \delta W + \underbrace{\delta Q}_{=0} = \underbrace{-PdV}_{\text{réversible donc } \delta W = -PdV}$

Donc $n\dfrac{R}{\gamma-1}dT = -PdV$.

D'après l'équation d'état du gaz parfait :

$PV = nRT \Rightarrow d(PV) = d(nRT) \Rightarrow VdP + PdV = nRdT$

Donc $\dfrac{PdV + VdP}{\gamma - 1} = -PdV \Leftrightarrow PdV + VdP = -(\gamma-1)PdV \Leftrightarrow \gamma PdV + VdP = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{\gamma\dfrac{dV}{V} + \dfrac{dP}{P} = 0}$ (Formulation différentielle de la loi de Laplace)

Si γ est constante sur l'intervalle $[T_1;T_2]$, on peut intégrer la loi de Laplace :

$\gamma \ln V + \ln P = cte$

$\Leftrightarrow \ln(V^\gamma P) = cte$

$\Leftrightarrow \boxed{PV^\gamma = cte = P_1V_1^\gamma = P_2V_2^\gamma}$ (loi de Laplace)

ou $TV^{\gamma-1} = cte$ ou $T^\gamma P^{1-\gamma} = cte$ (à partir de l'équation d'état du gaz parfait)

2) travail reçu

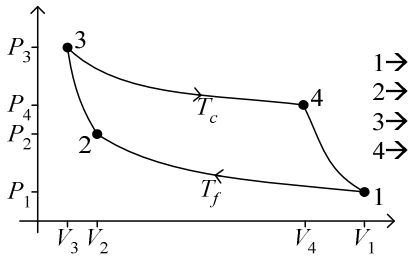
$\Delta U = Q + W = W$. Donc $W = \Delta U = \int_{T_1}^{T_2} nC_{m,V}\,dT$

si γ est constante, $W = \Delta U = \int_{T_1}^{T_2} n\frac{R}{\gamma-1}dT = \frac{nR}{\gamma-1}(T_2 - T_1)$

Pour une compression, $\Delta U = W > 0$

Pour une détente, $\Delta U = W < 0$

C) Cycle de Carnot du gaz parfait



1→2 : isotherme réversible à $T = T_1 = T_2 (= T_{\text{froide}})$

2→3 : adiabatique réversible

3→4 : détente isotherme à $T = T_3 = T_4 > T_1 (= T_{\text{chaude}})$

4→1 : détente adiabatique réversible

On pose $a = \frac{V_1}{V_2} > 1$

$$\begin{cases} P_1V_1 = P_2V_2 (= nRT_f) \\ P_3V_3 = P_4V_4 (= nRT_c) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} P_2V_2^\gamma = P_3V_3^\gamma \\ P_4V_4^\gamma = P_1V_1^\gamma \end{cases}$$

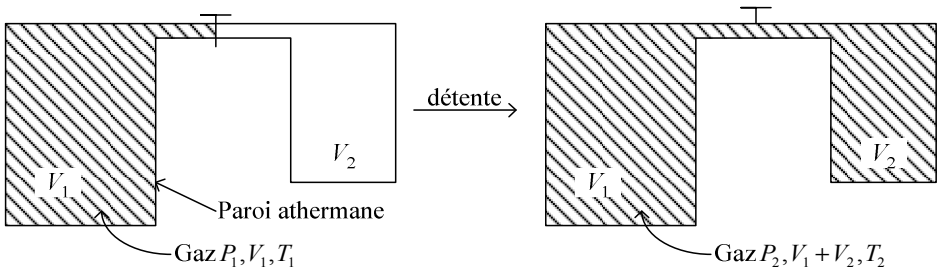
$$\Rightarrow \frac{P_2V_2^\gamma}{P_1V_1^\gamma} = \frac{P_3V_3^\gamma}{P_4V_4^\gamma} \Leftrightarrow \frac{V_1}{V_2}\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\gamma = \frac{V_4}{V_3}\left(\frac{V_3}{V_4}\right)^\gamma \Leftrightarrow a = \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_4}{V_3}$$

Transformation	W	Q	ΔU
$(T_f)\ \tau_{1->2}$	$nRT_f \ln a > 0$	$-nRT_f \ln a < 0$	0
$\tau_{2->3}$	$\frac{nR}{\gamma-1}(T_c - T_f)$	0	$\frac{nR}{\gamma-1}(T_c - T_f)$
$(T_c)\ \tau_{3->4}$	$-nRT_c \ln a < 0$	$nRT_c \ln a > 0$	0
$\tau_{4->1}$	$\frac{nR}{\gamma-1}(T_f - T_c)$	0	$\frac{nR}{\gamma-1}(T_f - T_c)$
(moteur) τ_{cycle}	$-nR\ln a \times (T_c - T_f) < 0$	$nR\ln a \times (T_c - T_f) > 0$	0

On définit le rendement $\eta = \dfrac{\overbrace{-W}^{\text{fourni par le système}}}{\underbrace{Q_{3->4}}_{\text{payé par l'utilisateur}}} = \dfrac{nR\ln a \times (T_c - T_f)}{nRT_c \ln a} = 1 - \dfrac{T_f}{T_c}$

III Détente de Joule Gay-Lussac

A) Présentation



B) Bilan énergétique

Système $V_1 + V_2$

Détente adiabatique, et $W = W_{\text{ext}} = 0$. On a donc :

$$\Delta U = 0$$
$$= U(P_2, V_1 + V_2, T_2) - U(P_1, \underbrace{V_1}_{\substack{\text{car } U=0 \\ \text{à droite au} \\ \text{début}}}, T_1)$$

On dit que la détente est isoU (à U constante)

C) Application aux gaz parfaits et réels

Gaz parfait : U ne dépend que de T (1ère loi de Joule). $\Delta U = 0 \Rightarrow T_1 = T_2$ ($U(T)$ est injective car strictement croissante : plus T augmente, plus l'énergie interne augmente). La transformation est donc monotherme.

Gaz réel : U dépend de V, T (il ne satisfait plus la première loi de Joule)

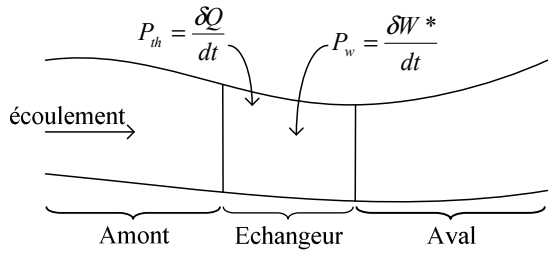
Pour un gaz de Van der Waals $U_{vdw}(V,T) = U_{gp}(T) - \dfrac{n^2 a}{V}$. Pour une mole de gaz réel diatomique : $U_{vdw} = \dfrac{5}{2}nRT - \dfrac{n^2 a}{V} = \dfrac{5}{2}RT - \dfrac{a}{V}$

Détente de $V = 1\text{L}$ à $V = 2\text{L}$: $\Delta U = \dfrac{5}{2}R(T_2 - T_1) - \dfrac{a}{V_2} + \dfrac{a}{V_1} = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{5}{2}R(T_2 - T_1) = a\left(\dfrac{1}{V_2} - \dfrac{1}{V_1}\right)$. Pour $a = 0{,}138$ Pa.m^6.mol^{-1}, $T_2 - T_1 = -3{,}3\text{K}$.

IV Détente de Joule Thomson (ou Joule Kelvin)

A) Formulation du 1er principe pour un écoulement stationnaire



On suppose P_w et P_{th} indépendants du temps

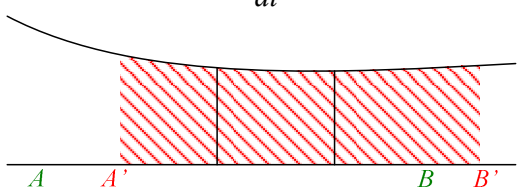
En amont : pression P_1, température T_1

En aval : pression P_2, température T_2

(Uniformes et stationnaires)

d : débit massique $= \frac{dm}{dt}$: masse qui traverse une surface donnée pendant dt

D_m : débit molaire $= \frac{dn}{dt}$



Système étudié entre A et B à t qui se déplace entre A' et B' à $t+\Delta t$

1er principe appliqué au système :

$\Delta U_\Sigma = W + Q$

$U_\Sigma(t+\Delta t) - U_\Sigma(t) = \left(U_{A'B}(t+\Delta t) + U_{BB'}(t+\Delta t)\right) - \left(U_{AA'}(t) + U_{A'B}(t)\right)$

Comme l'écoulement est stationnaire, $\frac{\partial \bullet}{\partial t} = 0$ Donc $\Delta U_\Sigma = U_{BB'} - U_{AA'}$

$Q = P_{th}\Delta t$

$W = W_{P_{\text{ext}}\text{amont}} + W_{P_{\text{ext}}\text{aval}} + P_w \Delta t$ ($\delta W_{P_{ext}} = -PdV$ et P est constante)

$= -P_1 \times (-V_{AA'}) - P_2 \times (V_{BB'}) + P_w \Delta t$

Donc $U_{BB'} - U_{AA'} = P_1 V_{AA'} - P_2 V_{BB'} + P_w \Delta t + P_{th}\Delta t$

$\Leftrightarrow U_{BB'} + P_2 V_{BB'} - \left(U_{AA'} + P_1 V_{AA'}\right) = (P_w + P_{th})\Delta t$

$\Leftrightarrow H_{BB'} - H_{AA'} = (P_w + P_{th})\Delta t$

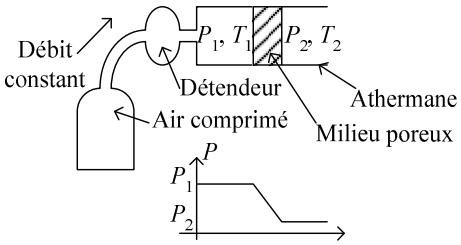
Masse de $AA' = \int_t^{t+\Delta t} d \times dt = d \times \Delta t$ (car $\frac{\partial d}{\partial t} = 0$)

De même, masse de $BB' = d \times \Delta t$

On note h l'enthalpie massique (h est constante au cours du temps, et même partout en aval <u>ou</u> en amont car les paramètres d'état sont uniformes dans ces deux zones). $d \times h_{\text{aval}} \times \Delta t - d \times h_{\text{amont}} \times \Delta t = (P_{th} + P_w)\Delta t$. Donc $d \times h_{\text{aval}} - d \times h_{\text{amont}} = P_{th} + P_w$ ou $D_m \Delta H_m = P_{th} + P_w$, où H_m est l'enthalpie molaire.

B) Détente de Joule Kelvin

1) Présentation



On suppose l'écoulement stationnaire

2) Bilan énergétique

1er principe appliqué à l'écoulement :

$$d \times \Delta h = \underbrace{P_{th}}_{=0 \text{ car athermane}} + \underbrace{P_w}_{=0 \text{ car pas de forces extérieures}} = 0$$

Donc $\Delta h = 0$

On dit que la détente de Joule Kelvin est isoH ou isenthalpique

3) Applications aux gaz

Pour un gaz parfait : H dépend uniquement de T (2nde loi de Joule)

Donc $\Delta H = 0 \Rightarrow T_1 = T_2$ (idem que pour U), la détente est donc monotherme

Pour un gaz réel : H dépend de T et P. On a $\Delta H = 0$ mais $\Delta T \neq 0$

En général, $\Delta T < 0$.