$\boxed{\mathbf{1}}$ Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies par

$$u_0, v_0 \in \mathbf{R} \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= u_n - \sqrt{3}v_n \\ v_{n+1} &= \sqrt{3}u_n + v_n \end{cases}$$

Calculer u_n et v_n en fonction de n, u_0, v_0.

$\boxed{\mathbf{2}}$ E est un espace vectoriel de dimension 3 rapporté à la base $\mathcal{B} = (i, j, k)$; f est l'endomorphisme de E de matrice dans la base $\mathcal{B}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1/ Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

2/ Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C}$ de E dans laquelle la matrice de f est $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(On dit que A et B sont des *matrices semblables*).

$\boxed{\mathbf{3}}$ Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$. Montrer

$$\left| \int_a^b f(t)g(t)dt \right| \leqslant \left(\int_a^b f(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

indication : Étudier $\displaystyle\int_a^b (f(t) + \lambda g(t))^2 \, dt$ où $\lambda \in \mathbf{R}$.