Probabilités

La théorie des hasards consiste à réduire tous les événements du même genre à un certain nombre de cas également possibles et à déterminer le nombre de cas favorables à l'événement dont on cherche la probabilité. Le rapport de ce nombre à celui de tous les cas possibles est la mesure de cette probabilité, qui n'est ainsi qu'une fraction dont le numérateur est le nombre de cas favorables, et dont le dénominateur est le nombre de tous les cas possibles.

PIERRE-SIMON LAPLACE,
Théorie analytique des probabilités (1819) [1]

1 Vocabulaire

1.1 Expérience aléatoire

DÉFINITION 1 – On appelle **expérience aléatoire** une expérimentation ou un phénomène conduisant à plusieurs résultats et pour lequel on ne peut pas savoir *a priori* quel résultat se produira.
Ces différents résultats sont appelés **issues**[2].

Donnons nous deux exemples d'expériences aléatoires que nous utiliserons plusieurs fois dans le chapitre.

Expérience 1 On lance une pièce de monnaie et on regarde la face supérieure.
Les issues possibles de cette expérience aléatoire sont : pile, face.

Expérience 2 On jette un dé et on observe la face supérieure.
Les issues de cette expérience aléatoire sont les nombres : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6.

1.2 Événements

DÉFINITION 2 – On appelle **événement** une partie de l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.
L'événement est dit **élémentaire** s'il ne correspond qu'à une seule et unique issue.

[1] Cité par JACQUES HARTHONG, *Probabilités et Statistique* (Université de Strasbourg – 2004).
[2] Ou **épreuve** (ou encore **cas**) suivant les différentes littératures ou les différents auteurs.

Rédaction Pour désigner un événement, on a l'habitude de procéder de deux manières :
- soit par une phrase explicite qui définit clairement les issues que l'on souhaite garder.
  Dans l' **expérience 2** , on pourrait considérer l'événement : "le nombre désigné par la face supérieure du dé est pair", qui correspondrait à la partie $\{2\ ;\ 4\ ;\ 6\}$ de toutes les issues possibles de l'expérience.
- soit par les issues elles-mêmes.
  Dans l' **expérience 1** , on pourrait considérer l'événement : "pile".
  C'est un événement *élémentaire*.

Dans les deux cas, on peut nommer l'événement d'une lettre majuscule ("*soit A l'événement...*")

> DÉFINITION 3 – Deux événements sont dits **incompatibles** s'ils ne peuvent pas se produire en même temps.

Exemples
- Dans l' **expérience 1** , les événements "pile" et "face" sont *incompatibles*. En effet, si une face de la pièce est montrée, l'autre est cachée.
- Dans l' **expérience 2** , les événements "la face supérieure du dé est 1" et "la face supérieure du dé est 2" sont *incompatibles*. En effet, un dé immobilisé ne peut montrer les faces 1 et 2 en même temps.

2 Notion de probabilité

Lorsqu'on fait une expérience aléatoire, on peut la renouveler un certain nombre de fois et calculer à chaque fois la *fréquence* (au sens statistique) d'un événement particulier. Celle-ci correspond au rapport du nombre de fois où l'événement se produit au nombre de fois où l'expérience est réalisée.
Sur un petit nombre d'expériences, cette fréquence peut beaucoup varier. Par contre, si l'on

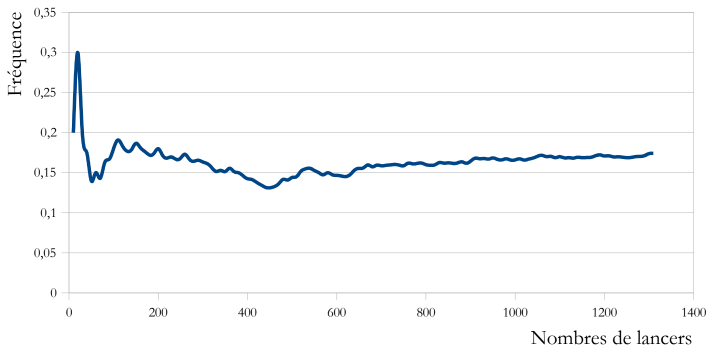


FIG. 1: **expérience 2** : **Variation de la fréquence d'un événement en fonction du nombre de lancers.**

renouvelle l'expérience un très grand nombre de fois (à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur par exemple), on voit cette fréquence qui variait beaucoup se stabiliser autour d'une valeur.
Considérant l' **expérience 2** , la figure 1 représente graphiquement les variations de la fréquence de l'événement "la face supérieure du dé est 1" en fonction du nombre de lancers.

Le *calcul des probabilités* se propose de déterminer cette fréquence *théorique* dans ce dernier cas, où l'expérience aléatoire est renouvelée un très grand nombre de fois...
Ce qui nous amène à considérer la définition suivante.

2.1 Définitions

DÉFINITION 4 – La probabilité d'un événement A est noté $p(A)$ et correspond au rapport :

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre d'issues possibles}}$$

Remarques

1. La définition ci-dessus n'a de sens que si les résultats de l'expérience ont la même "chance" d'aboutir (c'est-à-dire dans une situation d'*équiprobabilité* – voir définition 6). Dans le cadre de l' **expérience 2** , cette formule ne serait pas valable si le dé utilisé était pipé...
2. Il faut bien retenir que la probabilité d'un événement n'a rien de *prédictif* ! Il n'a que le sens de sa définition, à savoir : *"si on renouvelle un très grand nombre de fois l'expérience, la fréquence de l'événement considéré sera un nombre proche de la probabilité calculée"*.

Exemples Cherchons les probabilités des événements considérés au paragraphe 1.2 précédent.

- Dans l' **expérience 1** , considérons l'événement A : "pile".
  C'est un événement élémentaire donc il n'y a qu'une seule issue favorable. Le nombre d'issues possible est 2. On en conclut que $p(B) = \frac{1}{2}$.
- Dans l' **expérience 2** , considérons l'événement B : "le nombre désigné par la face supérieure du dé est pair".
  Il y a 3 issues favorables et 6 issues possibles donc $p(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

DÉFINITION 5 – Cas particuliers
Considérons un évènement A.
- Lorsque $p(A) = 0$ alors l'événement est dit **impossible**.
- Lorsque $p(A) = 1$ alors l'événement est dit **certain**.

Exemples

- Dans l' **expérience 1** , considérons l'événement Z : "la pièce se positionne sur la tranche". L'issue "tranche" ne fait pas partie des issues possibles donc $p(Z) = 0$ et l'événement Z est *impossible*.
- Dans l' **expérience 2** , considérons l'événement Y : "la face supérieure du dé est un nombre inférieur ou égal à 6". Il est clair que les issues possibles sont toutes des issues favorables à l'événement Y. On a donc $p(Y) = 1$ et l'événement Y est *certain*.

DÉFINITION 6 – Équiprobabilité.
Lorsque les événements élémentaires d'une même expérience aléatoire ont des probabilités égales on dit alors qu'il y a **équiprobabilité**.

Exemples

- Dans l' **expérience 1** , les événements "pile" et "face" ont tous deux des probabilités égales à $\frac{1}{2}$. Ils sont donc *équiprobables*.
- Dans l' **expérience 2** , les événements élémentaires "la face supérieure du dé est le nombre n" où n est un nombre entier compris entre 1 et 6 ont tous des probabilités égales à $\frac{1}{6}$. Ils sont donc *équiprobables*.

2.2 Propriétés

PROPRIÉTÉ 1 – *Si A est un événement d'une expérience aléatoire, on a*

$$0 \leqslant p(A) \leqslant 1$$

En effet, il est clair que dans le rapport $\dfrac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre d'issues possibles}}$, on a $0 \leqslant \text{nombre d'issues favorables} \leqslant \text{nombre d'issues possibles}$.

PROPRIÉTÉ 2 – *La somme de tous les événements élémentaires constitués à partir des issues d'une expérience aléatoire est égale à* 1.

Considérons les expériences du paragraphe 1.1.

- Dans l' **expérience 1** , l'événement A : "pile" et l'événement B : "face" constituent les seuls événements élémentaires (les seules issues étant pile et face).
  On a $p(A) = \frac{1}{2}$ et $p(B) = \frac{1}{2}$. On a donc bien $p(A) + p(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

PROPRIÉTÉ 3 – *Événement contraire.*
Soit A un événement. On note $\overline{A}$ l'événement contraire de A. On a :

$$p(A) + p(\overline{A}) = 1$$

Dans l' **expérience 2** , considérons l'événement B : "la face supérieure du dé est 1". L'événement contraire $\overline{B}$ de B est "la face supérieure du dé est différente de 1".
On a $p(B) = \frac{1}{6}$. Donc $p(\overline{B}) = 1 - p(B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. Il y a bien 5 issues favorables (tous les nombres 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 conviennent) parmi 6 issues possibles.

PROPRIÉTÉ 4 – *Événements incompatibles.*
On considère deux événements A et B ***incompatibles.***
Soit C *l'événement "*A ou B se produit*". On a alors*

$$p(C) = p(A) + p(B)$$

Dans l' **expérience 2** , considérons l'événement A : "la face supérieure du dé est 1 ou 6".
La probabilité de l'événement : "la face supérieure du dé est 1" vaut $\frac{1}{6}$.
La probabilité de l'événement : "la face supérieure du dé est 6" vaut $\frac{1}{6}$ aussi.
Les deux événements ci-dessus étant incompatibles, on en déduit que $p(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

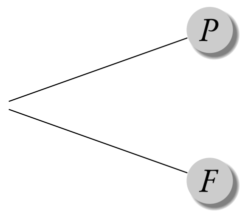
3 Arbres

3.1 Un support visuel

On a l'habitude de visualiser toutes les issues possibles d'une expérience aléatoire à l'aide d'un arbre, appelé **arbre des possibles**.

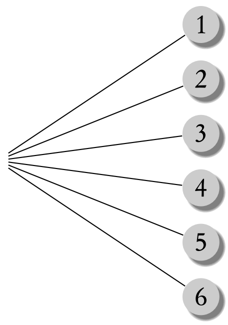
Expérience 1

On note P et F les issues "pile" et "face" respectivement.
On construit alors l'arbre suivant :



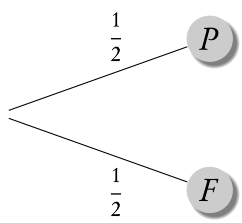
Expérience 2

Les issues possibles sont 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6.
On construit alors l'arbre suivant :

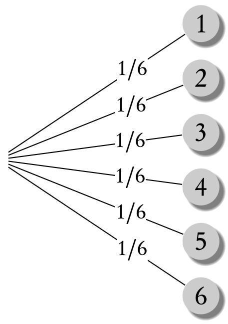


On peut aussi indiquer sur chaque branche de l'arbre les probabilités des événements élémentaires correspondants à chacune des issues possibles : l'arbre est alors un **arbre pondéré**.

Expérience 1



Expérience 2



3.2 Exemple d'utilisation

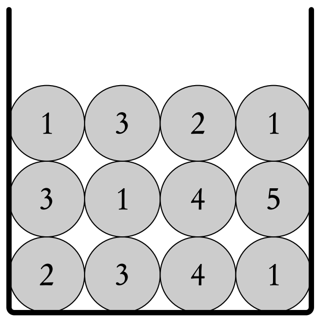


FIG. 2: Urne contenant 12 boules numérotées de 1 à 5

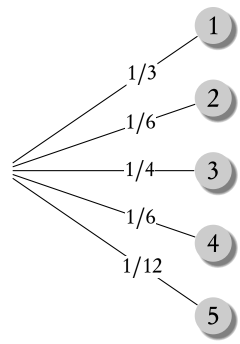


FIG. 3: Arbre pondéré de l'expérience : "on tire une boule et on lit son numéro"

On se donne une urne (figure 2) dans laquelle sont placées 12 boules indiscernables au touché et toutes marquées d'un numéro de 1 à 5.

Considérons l'événement A :"la boule tirée ne porte pas le numéro 1"

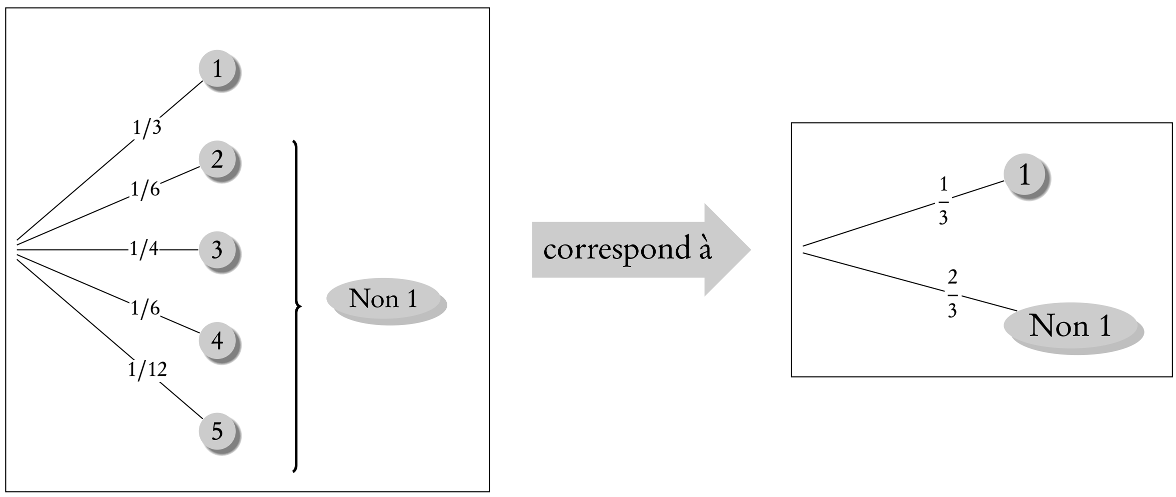


FIG. 4: Utilisation d'un arbre pondéré

Additionnons les probabilités des différentes issues autres que 1 (figure 4) :

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$$

.

On a donc $P(A)=\frac{2}{3}$ qui est la probabilité que la boule tirée ne porte pas le n° 1.

4 Expérience en deux étapes

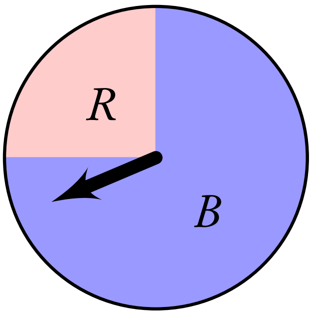


FIG. 5: Roue n° 1

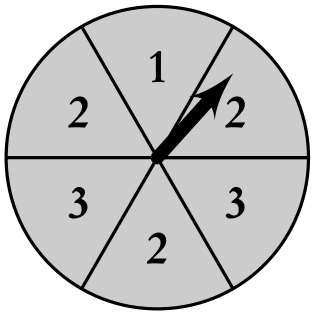
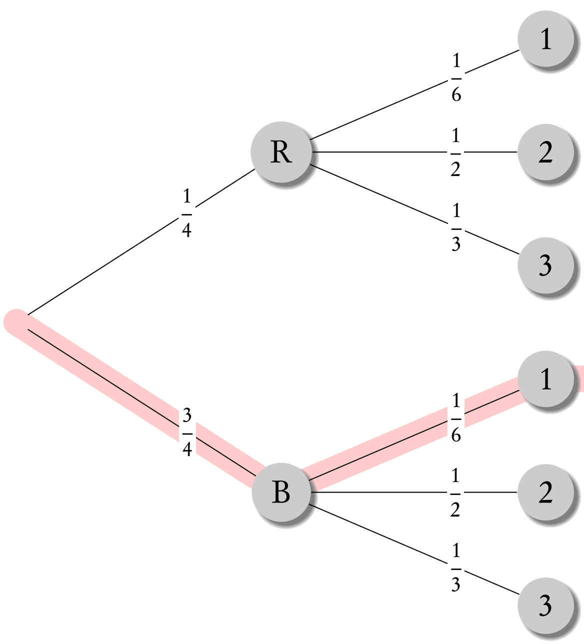


FIG. 6: Roue n° 2

On considère l'expérience suivante, qui se déroule en deux étapes :

Étape 1 – D'abord, on fait tourner une première roue de loterie (voir figure 5) : on obtient la couleur "rouge", notée R, avec une probabilité de $\frac{1}{4}$ et la couleur "bleu", notée B avec une probabilité de $\frac{3}{4}$.

Étape 2 – Ensuite, on fait tourner une deuxième roue de loterie (voir figure 6) : on obtient le numéro 1 avec la probabilité $\frac{1}{6}$, le numéro 2 avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et le numéro 3 avec la probabilité $\frac{1}{3}$.



$P(R,1) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$

$P(R,2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

$P(R,3) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

$P(B,1) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{8}$

$P(B,2) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

$P(B,3) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$

FIG. 7: Arbre pondéré de l'expérience à deux épreuves (avec les calculs de probabilités pour chaque branche)

Un arbre pondéré (voir figure 7) permet :

- de déterminer tous les issues possibles à la fin de ces deux étapes.
  Les issues possibles peuvent être notées ainsi : $(R,1)$, $(R,2)$, $(R,3)$, $(B,1)$, $(B,2)$, $(B,3)$.

Chacune de ces issues est représentée dans l'arbre de la figure 7 par la succession de deux branches.
- de calculer la probabilité d'obtenir chacune des six issues possibles à la fin des deux étapes.

Comment évaluer la probabilité de l'issue $(B, 1)$ par exemple ?

On repère le chemin menant à l'issue $(B, 1)$ (surligné sur la figure 7) : sur la première branche, il y a une probabilité de $\frac{3}{4}$ et sur la deuxième, une probabilité de $\frac{1}{6}$. Donc, on en déduit que :

$$P(B, 1) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{3}{4 \times 6} = \frac{1}{8}$$

On a utilisé la propriété suivante (admise).

PROPRIÉTÉ 5 – *Dans un arbre, la probabilité de l'issue auquel conduit un chemin est égal au* ***produit*** *des probabilités rencontrées le long de ce chemin.*