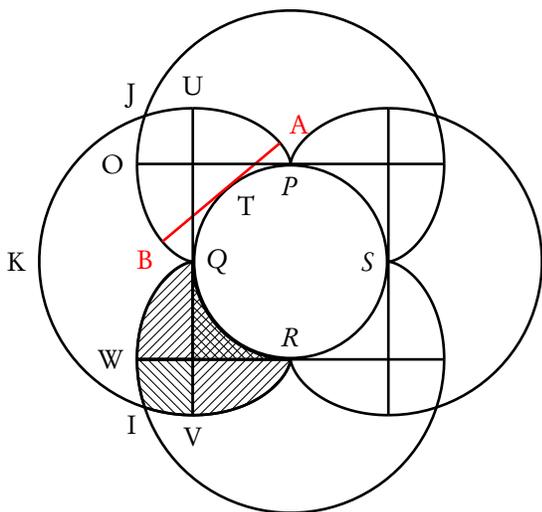


## Branches multiples des enveloppes

10 juin 2008

Le chapitre VII « Généralités sur les courbes » du livre de Henri Bouasse : *Cours de mathématiques générales*, paru en 1911 chez Ch. Delagrave à Paris, contient une partie très intéressante sur les enveloppes et enveloppées dont j'ai extrait ce court paragraphe (§ 136) intitulé « Branches multiples des enveloppes », afin de l'illustrer avec PStricks et d'en proposer une animation flash.



« Nous avons dit que l'enveloppe séparait les régions du plan respectées par l'enveloppe dans son mouvement et sa déformation, des régions qui ne le sont pas. Mais il peut arriver que certaines régions soient recouvertes deux fois, d'autres une seule, d'autres complètement respectées. C'est dire que l'enveloppe peut avoir des branches multiples qui se coupent.

Pour fixer les idées prenons comme enveloppée une ellipse infiniment aplatie et se réduisant à son grand axe ; autrement dit, prenons le segment de droite  $AB$ . Faisons-le rouler sur le cercle  $PQRS$ . Son enveloppe se compose d'abord de ce cercle, ensuite du lieu de ses extrémités. Pour simplifier la

figure, prenons la longueur  $AB$  égale au quart de la circonférence.

Quand la droite passe de la position  $PO$  à la position  $QU$ , ses extrémités décrivent deux arcs  $PU$ ,  $OQ$ , de développante de cercle. [...]

À partir de la position  $QU$ , la droite pivote sur son extrémités  $Q$  ; l'autre extrémité décrit la demi-circonférence  $UV$ . Et ainsi de suite.

Il est facile de voir que le plan est partagé en cinq régions.

L'une est formée des portions intérieures au cercle  $C$  et des portions extérieures aux diverses branches de l'enveloppe. Elle n'est pas touchée par l'enveloppée.

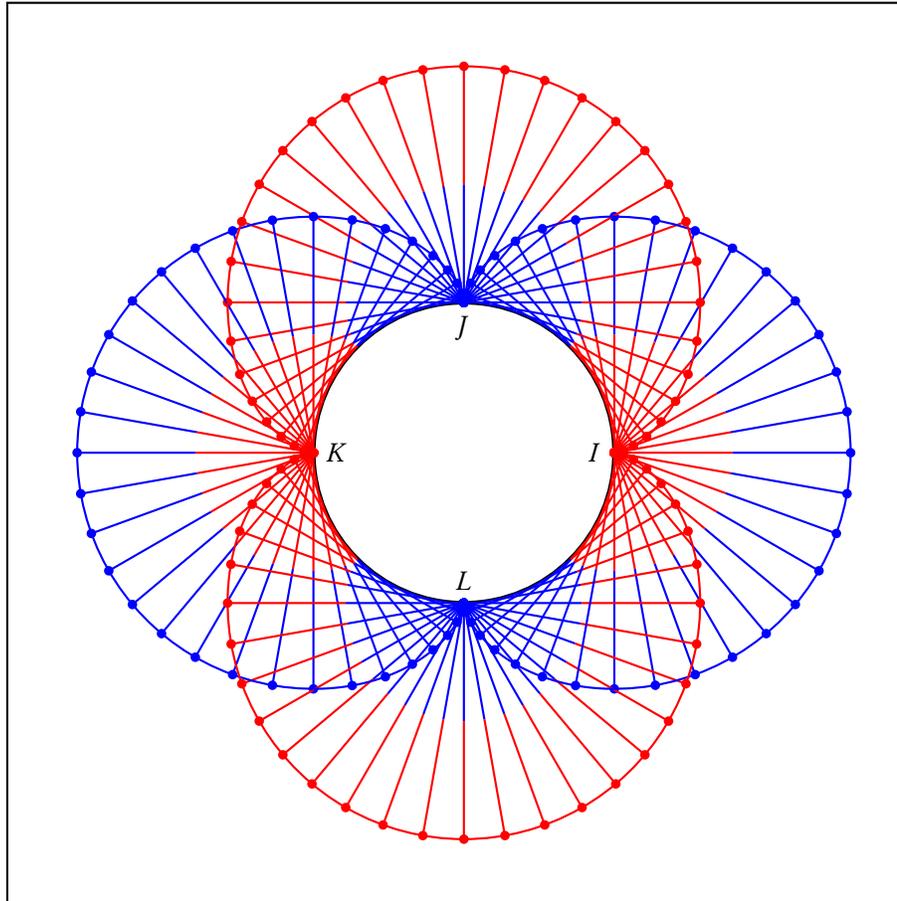
La seconde région se compose des quatre aires identiques à  $IWKQJ$  ; elles ne sont recouvertes qu'une fois.

La troisième région se compose de quatre aires identiques, dont est ombrée du nord-est au sud-ouest. Elles sont recouvertes deux fois, dans le pivotement sur deux points du cercle à  $90^\circ$  l'un de l'autre. Celle qui est ombrée, est recouverte d'abord pendant le pivotement sur  $Q$ , ensuite pendant le pivotement sur  $R$ .

La quatrième région se compose de quatre aires identiques, dont l'une est ombrée du nord-ouest au sud-est. Elles sont recouvertes deux fois. Celle qui est ombrée est recouverte pendant le pivotement sur  $Q$ , ensuite pendant le roulement sur  $QR$ .

La cinquième région est formée des quatre aires identiques, dont l'une est ombrée, de deux systèmes de hachures. Elle n'est touchée qu'une fois et pendant le roulement de la droite. »

Une illustration en couleurs avec représentation du segment dans différentes positions.



En conclusion de ce paragraphe, Henri Bouasse suggère l'expérience suivante :

« Si la droite était lumineuse et tournait d'un mouvement assez rapide pour que la persistance des impressions lumineuses nous montrât un éclaircissement permanent, les cinq régions nous apparaîtraient séparées par des lignes de discontinuité dans l'éclaircissement. À l'intérieur de chaque région, au contraire, l'éclaircissement serait continu. »

Il était tentant de réaliser une animation "flash" afin de vérifier le bien-fondé de cette affirmation, mais les quelques essais que j'ai réalisés n'ont pas été concluants. Par contre, je vous propose l'animation "flash" suivante réalisée avec swftools et dont les images ont été calculées avec PStricks.

Le fichier ayant servi à générer les images pour l'animation est ici :

<http://melusine.eu.org/syracuse/mluque/bouasse-enveloppes/animation-enveloppes.tex>

Et l'ensemble des fichiers :

<http://melusine.eu.org/syracuse/mluque/bouasse-enveloppes/>

