

## Développements limités

---

Il est possible d'utiliser **PARI/GP** pour calculer des *développements limités*, voire des *développements généralisés* au voisinage de 0. Le programme se comporte différemment suivant que l'expression est rationnelle ou pas.

L'ordre du développement est par défaut égal à 16. Il peut être modifié en utilisant le raccourci `\ps n` où `n` est l'ordre du développement que l'on souhaite utiliser.

```
gp] \ps 11
```

```
seriesprecision = 11 significant terms
```

Commençons avec un polynôme.

```
gp] (1-2*x+3*x^2)^3
```

```
%1 = 27x^6 - 54x^5 + 63x^4 - 44x^3 + 21x^2 - 6x + 1
```

Le polynôme est écrit suivant les *puissances décroissantes*, cela ne correspond pas à l'écriture habituelle des développements limités.

```
gp] taylor((1-2*x+3*x^2)^3, x)
```

```
%2 = 1 - 6x + 21x^2 - 44x^3 + 63x^4 - 54x^5 + 27x^6 + O(x^11)
```

C'est maintenant rangé dans le bon ordre et le *grand O* caractéristique apparaît, bien qu'il soit nul dans le cas présent.

```
gp] 1/(1+x)
```

$$\%3 = \frac{1}{x+1}$$

C'est bien une fraction rationnelle...

**gp]** taylor(1/(1+x), x)

$$\%4 = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + x^8 - x^9 + x^{10} + O(x^{11})$$

Son développement limité est bien connu....

**gp]** sin(x)

$$\%5 = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 - \frac{1}{39916800}x^{11} + O(x^{12})$$

Pour une fonction non rationnelle (*transcendante*), il n'est pas nécessaire d'invoquer taylor pour obtenir le développement, ce qui nous en dit beaucoup sur la représentation interne des fonctions par **PARI/GP**.

**gp]** tan(x)

$$\%6 = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \frac{1382}{155925}x^{11} + O(x^{12})$$

**gp]** \ps 7

seriesprecision = 7 significant terms

**gp]** sqrt(1+x)

$$\%7 = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 - \frac{21}{1024}x^6 + O(x^7)$$

`gp| sqrtn(1+x,3)`

$$\%8 = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 - \frac{10}{243}x^4 + \frac{22}{729}x^5 - \frac{154}{6561}x^6 + O(x^7)$$

`sqrtn(x,n)` est la racine  $n$ -ième de  $x$ , i.e.  $\sqrt[n]{x}$ .

**gp]** 1/(exp(x)-1)

$$\%9 = x^{-1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12}x - \frac{1}{720}x^3 + \frac{1}{30240}x^5 + O(x^6)$$

**PARI/GP** donne donc des développements généralisés en 0, notons au passage la disparition d'un ordre dans le calcul précédent.

**gp]** 1/(cos(x)-1)

$$\%10 = -2x^{-2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{120}x^2 - \frac{1}{3024}x^4 + O(x^5)$$

**gp]** 1/sin(x)-1/sinh(x)

$$\%11 = \frac{1}{3}x + \frac{31}{7560}x^5 + O(x^6)$$

**gp]** log(sin(x))

\*\*\* log: log is not meromorphic at 0.

Il y a bien sûr des limites à tout cela...