Détermination formelle d'une somme

Le but, ici, est de calculer, en fonction de n, la somme

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)(k+3)$$

On peut *aisément* démontrer qu'elle est de la forme $P(n)$ où P est un polynôme de degré 5.

La méthode utilisée consiste à calculer 6 valeurs de ce polynôme (pour $n = 1, \ldots, 6$) et à demander ensuite le polynôme d'interpolation des valeurs obtenues.

On définit un tableau vide.

```
gp] y=[]
```

%1 = $()$

On remplit le tableau avec les valeurs de la somme pour n variant de 1 à 6.

```
gp] for(n=1,6,y=concat(y,sum(k=1,n,k*(k+1)*(k+2)*(k+3))))
```

Regardons ce qu'est devenu le tableau y.

```
gp] y
```

%2 = $\begin{pmatrix} 24 & 144 & 504 & 1344 & 3024 & 6048 \end{pmatrix}$

On détermine le polynôme d'interpolation pour ces valeurs.

gp] `P=polinterpolate(y,,n)`

$$\%3 = \frac{1}{5}n^5 + 2n^4 + 7n^3 + 10n^2 + \frac{24}{5}n$$

Il ne reste plus qu'à factoriser !

gp] `factor(P)`

$$\%4 = \begin{pmatrix} n & 1 \\ n+1 & 1 \\ n+2 & 1 \\ n+3 & 1 \\ n+4 & 1 \end{pmatrix}$$

Les facteurs qui apparaissent ici sont à coefficients entiers et ils sont accompagnés de leur ordre de multiplicité. **PARI/GP** ne propose pas, du moins pas à ma connaissance, de procédure donnant une *écriture factorisée* d'un polynôme. Visuellement nous disposons de toute les informations pour la reconstituer et **PARI/GP** propose toute une palette d'instructions permettant de la retrouver, codée correctement en LaTeX. C'est l'objet du script `factorisation.gp`.

gp] `read("factorisation.gp")`

gp] `factorisation(P)`

$$\%5 = \frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

Maintenant que la méthode semble être au point, il est utile d'écrire un script `sumpolyk.gp` qui en fera la synthèse, nous permettant ainsi de disposer d'une procédure *directe*.

gp] `read("sumpolyk.gp")`

gp] `sumpolyk(k,1,n)`

$\%6 = \frac{1}{2}n(n+1)$

gp] `sumpolyk(k^2,1,n)`

$\%7 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

gp] `sumpolyk(k*(k+1),1,n)`

$\%8 = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

gp] `sumpolyk(k*(k+1)*(k+2),1,n)`

$\%9 = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$

Tiens, tiens...

gp] `sumpolyk(k*(k+1)*(k+2)*(k+3)*(k+4),1,n)`

$\%10 = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$

Il y a là un résultat intéressant à noter !

Essayons autre chose :

gp] `sumpolyk(k^2+k-a,1,n)`

```
  *** factor: sorry, factor for general polynomials is not yet implemented.
```

Mince !