L'utilisation du package xcolor dans la représentation du phénomène de dispersion lumineuse

Manuel Luque

20 octobre 2 005

1 Déviation d'un rayon lumineux monochromatique

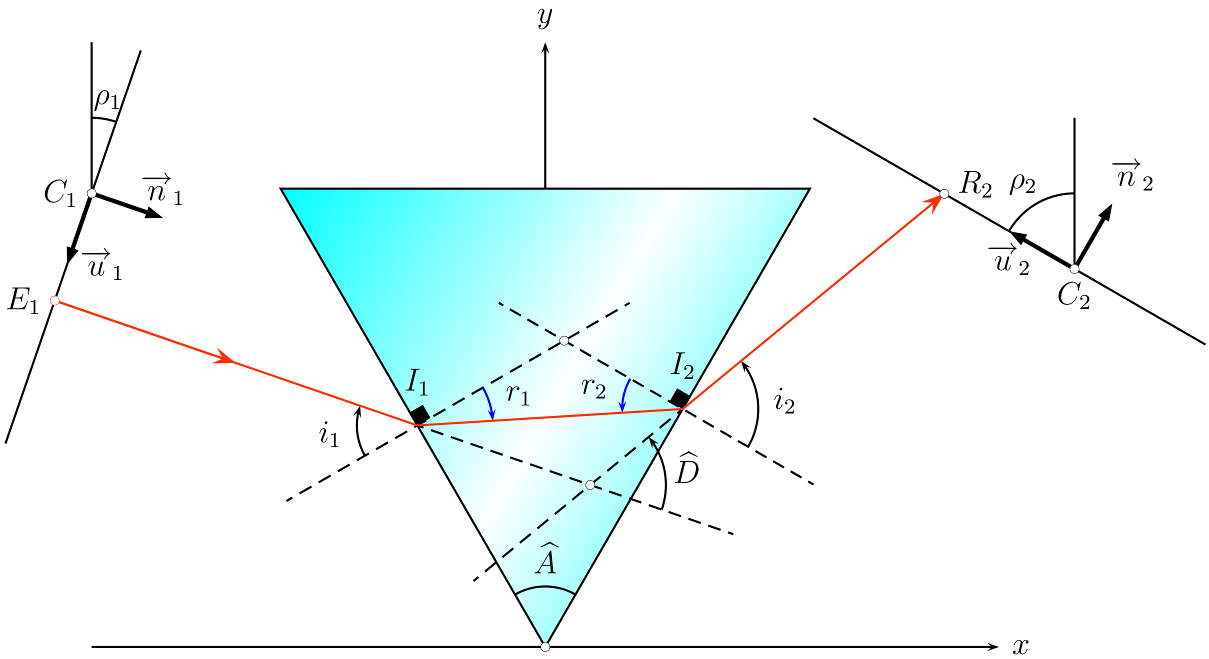
Cette première partie traite de la construction du trajet d'un rayon lumineux monochromatique dans un prisme. Le cahier de charges est le suivant, les grandeurs suivantes devant être paramétrables :

– l'angle du prisme ;
– la direction du rayon incident ;
– le choix de la radiation par sa longueur d'onde en nm.

La construction doit s'adapter automatiquement à ces valeurs, ainsi que la couleur de la radiation. . . cela va de soi.

La méthode de calculs adoptée est celle de Gernot Hoffmann qu'il détaille dans son document : `http://www.fho-emden.de/~hoffmann/prism16072005.pdf`

1.1 Calculs et constructions géométriques



Le prisme défini par son demi-angle au sommet $A/2$ par la variable :

```
/AnglePrisme 30 def % demi-angle au sommet du prisme
```

L'émetteur E_1 est repéré par sa position sur un plan défini par l'angle ρ_1 qu'il fait avec la verticale. La trace de ce plan est la droite C_1E_1. C_1 est une origine arbitraire :

```
/C1x -6 def % abscisse de C1
/C1y  6 def % ordonnée de C1
```

La position de E_1 est réglée par le coefficient u : $\overrightarrow{C_1E_1} = u\overrightarrow{u}_1$:

$$\overrightarrow{u_1} = \begin{bmatrix} -\cos(\rho_1) \\ -\sin(\rho_1) \end{bmatrix}$$

```
/u 1.5 def
/u1x AnglePlan1 sin neg def
/u1y AnglePlan1 cos neg def
/E1x C1x u u1x mul add def % abscisse de E1
/E1y C1y u u1y mul add def % ordonnée de E1
```

La normale à ce plan $\overrightarrow{n}_1$ qui sera la direction du rayon incident a pour coordonnées :

$$\overrightarrow{n_1} = \begin{bmatrix} \cos(\rho_1) \\ -\sin(\rho_1) \end{bmatrix}$$

```
  /n1x AnglePlan1 cos def
  /n1y AnglePlan1 sin neg def
```

L'équation paramétrique du rayon incident se déduit, $P(x,y)$ étant un point courant de la droite, de :

$$\overrightarrow{E_1P} = \lambda\overrightarrow{n_1}$$

$$x = x_{E_1} + \lambda n_{1x} \tag{1}$$

$$y = y_{E_1} + \lambda n_{1y} \tag{2}$$

Il s'agit de déterminer l'intersection du rayon incident avec la face correspondante du prisme. L'équation de celle-ci s'écrit :

$$y = x\tan(90 + \frac{A}{2}) = -\frac{x}{\tan(A/2)} \tag{3}$$

On détermine ainsi les coordonnées du point d'incidence I_1, en calculant d'abord λ par substitution des expressions de (1) et (2) dans l'équation (3) :

$$y_{E_1} + \lambda n_{1y} = -\frac{x_{E_1} + \lambda n_{1x}}{\tan(A/2)}$$

$$y_{E_1}\tan(A/2) + \lambda n_{1y}\tan(A/2) = -(x_{E_1} + \lambda n_{1x})$$

$$\lambda\big(n_{1y}\tan(A/2) + n_{1x}\big) = -\big(x_{E_1} + y_{E_1}\tan(A/2)\big)$$

$$\lambda = -\frac{x_{E_1} + y_{E_1}\tan(A/2)}{n_{1y}\tan(A/2) + n_{1x}}$$

$$\lambda = -\frac{x_{E_1}\cos(A/2) + y_{E_1}\sin(A/2)}{n_{1y}\sin(A/2) + n_{1x}\cos(A/2)}$$

On en déduit les coordonnées de I_1 avec (1) et (2).

```
  /g1x AnglePrisme sin neg def % -sin(A/2)
  /g1y AnglePrisme cos def  %  cos(A/2)
  /Lambda {E1x g1y mul E1y g1x mul neg add
          n1y g1x mul neg n1x g1y mul add
          div neg} bind def
point I1
  /i1x {E1x Lambda n1x mul add} bind def
  /i1y {E1y Lambda n1y mul add} bind def
```

n étant l'indice de réfraction du verre pour cette radiation, i_1 l'angle d'incidence du rayon sur la face d'entrée la loi de SNELL-DESCARTES permet de calculer l'angle de réfraction r_1 dans le verre.

$$\sin i_1 = n\sin r_1 \Longrightarrow r_1 = \arcsin\left(\frac{\sin i_1}{n}\right)$$

```
/alpha1 AnglePlan1 AnglePrisme add def % i1
/sinB1 alpha1 sin N div def % sin(r1)=sin(i1)/n
/B1 sinB1 asin def % r1
```

Pour le calcul de l'indice du prisme n, j'utilise la formule de Sellmeier's que donne Gernot Hoffmann pour du verre flint lourd :

$$n^2 = 1 + \frac{B_1\lambda^2}{\lambda^2 - C_1} + \frac{B_2\lambda^2}{\lambda^2 - C_2} + \frac{B_3\lambda^2}{\lambda^2 - C_3}$$

On détermine ensuite l'équation paramétrique de la droite I_1I_2, avec $P(x, y)$ un point courant de la droite et $\overrightarrow{d_{12}}$ un vecteur directeur :

$$\overrightarrow{d_{12}} = \begin{bmatrix} \cos(\delta_1) \\ \sin(\delta_1) \end{bmatrix}$$

avec $\delta_1 = \frac{A}{2} - r_1$, qui est l'angle que fait I_1I_2 avec l'horizontale.

$$\overrightarrow{I_1P} = \lambda\overrightarrow{d_{12}}$$

$$x = x_{I_1} + \lambda d_{12_x} \tag{4}$$
$$y = y_{I_1} + \lambda d_{12_y} \tag{5}$$

Le côté droit du prisme a pour équation :

$$y = x\tan(90 - \frac{A}{2}) = \frac{x}{\tan(A/2)} \tag{6}$$

On détermine les coordonnées du point d'intersection I_2 comme précédemment :

$$y_{I_1} + \lambda d_{12_y} = \frac{x_{I_1} + \lambda d_{12_x}}{\tan(A/2)}$$

$$y_{I_1}\tan(A/2) + \lambda d_{12_y}\tan(A/2) = (x_{I_1} + \lambda d_{12_x})$$
$$\lambda\big(d_{12_y}\tan(A/2) - d_{12_x}\big) = \big(x_{I_1} - y_{I_1}\tan(A/2)\big)$$
$$\lambda = \frac{x_{I_1} - y_{I_1}\tan(A/2)}{d_{12_y}\tan(A/2) - d_{12_x}}$$
$$\lambda = \frac{x_{I_1}\cos(A/2) - y_{I_1}\sin(A/2)}{d_{12_y}\sin(A/2) - d_{12_x}\cos(A/2)}$$

On en déduit les coordonnées de I_2 avec (4) et (5).

```
  /g2x AnglePrisme sin def % sin(A/2)
  /g2y AnglePrisme cos def % cos(A/2)
  /d12x Delta1 cos def % d12x
  /d12y Delta1 sin def % d12y
  /Lambda2 {i1x g2y mul i1y g2x mul sub
         d12y g2x mul d12x g2y mul sub
         div} bind def
point I2
  /i2x {i1x Lambda2 d12x mul add} bind def
  /i2y {i1y Lambda2 d12y mul add} bind def
```

La dernière étape consiste à calculer le rayon réfracté dans l'air et son intersection avec l'écran.

$$n \sin r_2 = \sin i_2 \Longrightarrow i_2 = \arcsin(n \sin r_2)$$

```
  /B2  AnglePrisme 2 mul B1 sub def % r2
  /sinA2 N B2 sin mul def        % sin(i2)=n*sin(r2)
  /alpha2 sinA2 asin def       % i2
```

L'angle que fait le rayon réfracté I_2R_2 avec l'horizontale vaut :

$$\delta_2 = i_2 - \frac{A}{2}$$

```
  /Delta2 alpha2 AnglePrisme sub def
```

Le vecteur directeur de la droite d_2 :

$$\overrightarrow{d_2} = \begin{bmatrix} \cos(\delta_2) \\ \sin(\delta_2) \end{bmatrix}$$

```
  /d2x Delta2 cos def
  /d2y Delta2 sin def
```

On cherche l'équation de la droite I_2R_2

$$\overrightarrow{I_2P} = \lambda\overrightarrow{d_2}$$

$$x = x_{I_2} + \lambda d_{2_x} \quad (7)$$
$$y = y_{I_2} + \lambda d_{2_y} \quad (8)$$

et son intersection avec l'écran, dont la position est déterminée par un point C_2 choisi arbitrairement et l'angle qu'il fait avec la verticale ρ_2. Le vecteur directeur de cette droite est :

$$\overrightarrow{u_2} = \begin{bmatrix} \sin(\rho_2) \\ -\cos(\rho_2) \end{bmatrix}$$

```
  /u2x AnglePlan2 sin def
  /u2y AnglePlan2 cos neg def
```

$$x = x_{C_2} + \mu u_{2_x} \quad (9)$$
$$y = y_{C_2} + \mu u_{2_y} \quad (10)$$

(7), (8), (9), (10) nous donnent un système en μ et λ :

$$\begin{cases} x_{C_2} + \mu u_{2_x} & = & x_{I_2} + \lambda d_{2_x} \\ y_{C_2} + \mu u_{2_y} & = & y_{I_2} + \lambda d_{2_y} \end{cases}$$

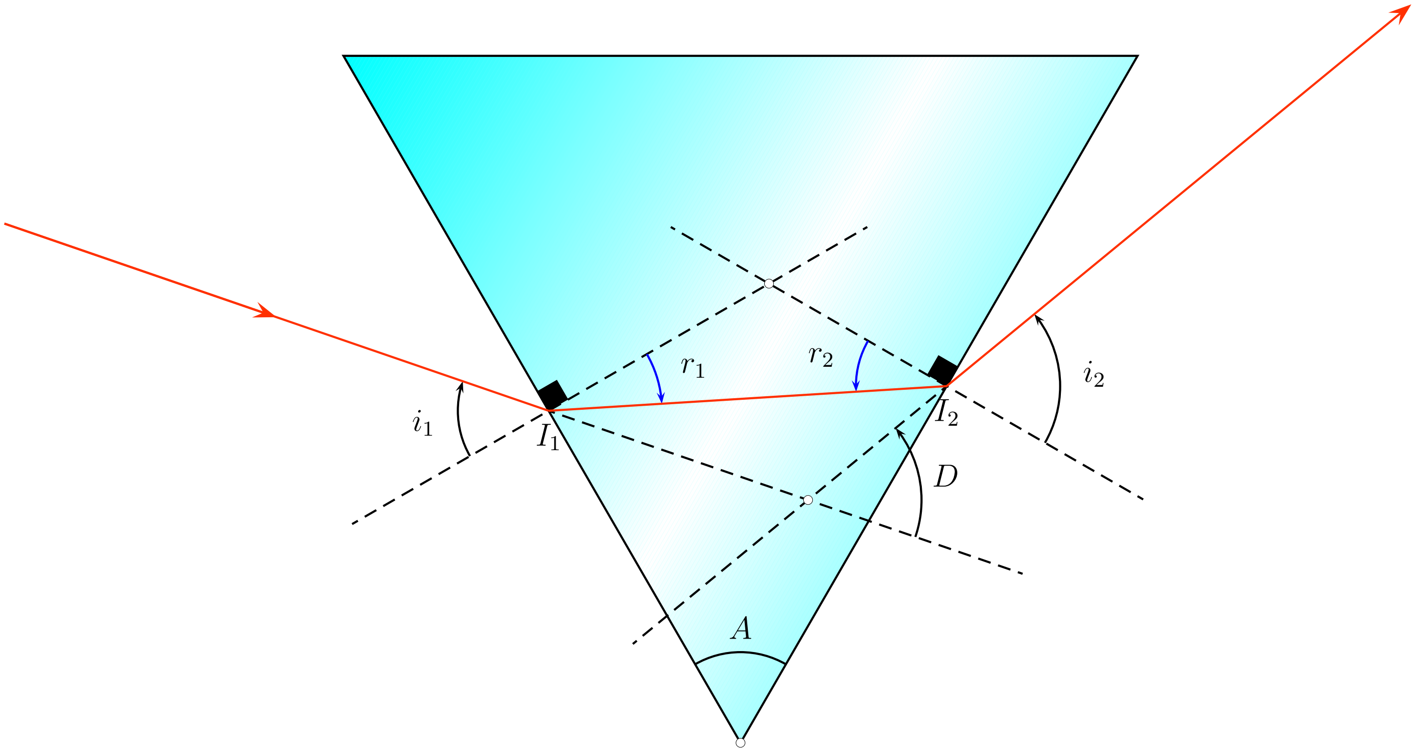
$$\begin{cases} \mu & = & \frac{-(x_{I_2} - x_{C_2})d_{2_y} + (y_{I_2} - y_{C_2})d_{2_x}}{-u_{2_x} d_{2_y} + u_{2_y} d_{2_x}} \\ \lambda & = & \frac{-u_{2_x}(y_{I_2} - y_{C_2}) + u_{2_y}(x_{I_2} - x_{C_2})}{-u_{2_x} d_{2_y} + u_{2_y} d_{2_x}} \end{cases}$$

```
  /DELTA u2x d2y mul neg u2y d2x mul add def
  /DELTA_X i2x C2x sub d2y mul neg
          i2y C2y sub d2x mul add def
  /DELTA_Y u2x i2y C2y sub mul neg
          u2y i2x C2x sub mul add def
  /MU DELTA_X DELTA div def
  /LAMBDA3 DELTA_Y DELTA div def
le point R2
  /r2x C2x MU u2x mul add def
  /r2y C2y MU u2y mul add def
```

Tous les éléments du schéma ayant été calculés, les points se placent grâce à la puissance de `pst-node` :

```
  \pnode(! C1x C1y){C1}
  \pnode(! C2x C2y){C2}
  \pnode(! E1x E1y){E1}
  \pnode(! i1x i1y){P1}
  \pnode(! i2x i2y){I2}
  \pnode(! r2x r2y){R2}
```

1.2 Le problème de physique



n étant l'indice de réfraction du verre pour cette lumière, i_1 l'angle d'incidence du rayon sur la face d'entrée la loi de SNELL-DESCARTES permet de calculer l'angle de réfraction r_1 dans le verre.

$$\sin i_1 = n \sin r_1 \Longrightarrow r_1 = \arcsin\left(\frac{\sin i_1}{n}\right)$$

Le rayon lumineux subit ensuite une deuxième réfraction en I_2, lors du passage du verre dans l'air :

$$n \sin r_2 = \sin i_2 \Longrightarrow i_2 = \arcsin\left(n \sin r_2\right)$$

En I_1, le rayon est dévié d'un angle $i_1 - r_1$, en I_2 de $i_2 - r_2$ soit globalement de :

$$D = i_1 + i_2 - (r_1 + r_2) = i_1 + i_2 - A$$

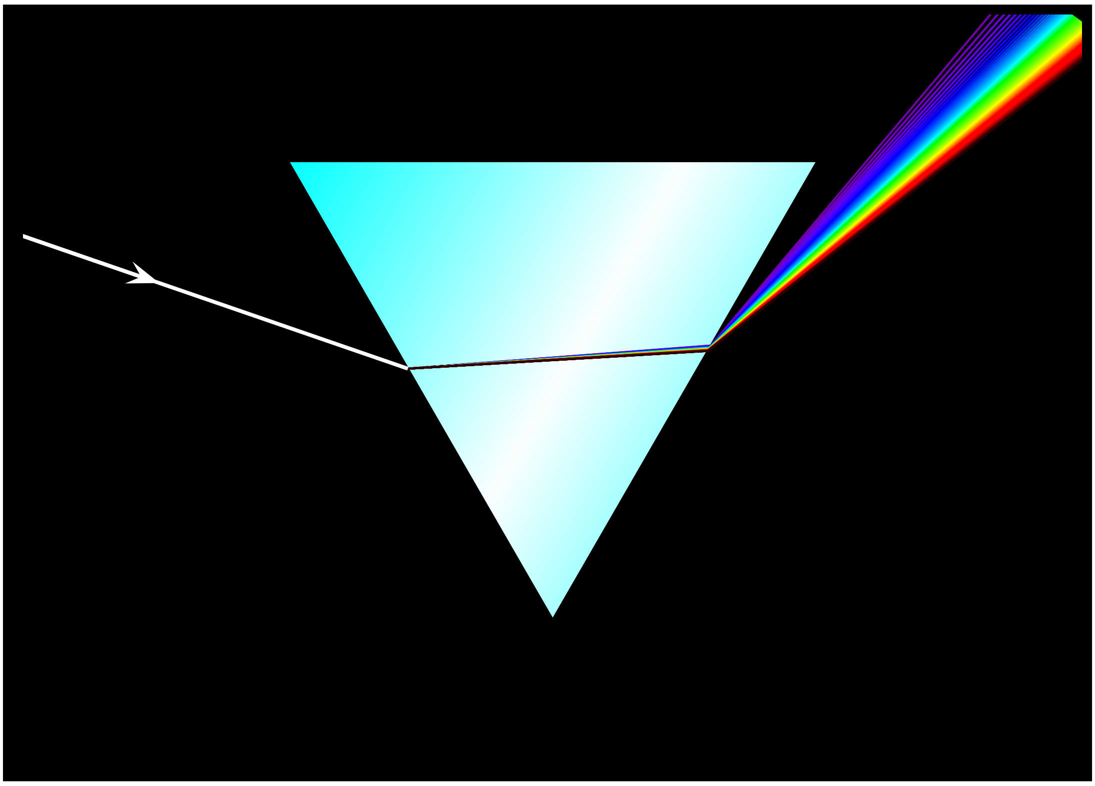
Cette déviation passe par un minimum lorsque $r_1 = r_2 = \dfrac{A}{2}$, ce qui permet d'en déduire la valeur que doit posséder l'angle d'incidence d'entrée :

$$\sin i_m = n \sin\frac{A}{2} \Longrightarrow i_m = 48{,}6^{\text{o}} \quad (A = 60,\, n = 1,5)$$

2 Dispersion d'un rayon de lumière blanche par le prisme

Grâce à `\multido` il est possible de simuler très simplement le phénomène de dispersion lumineuse en faisant variant la longueur d'onde dans le domaine visible :

```
multido{\iLAMBDA=400+5}{80}{%
 \pstVerb{/lambda \iLAMBDA\space def}%
definecolor{prisme}{wave}{\iLAMBDA}%
```



3 Extension possible

À ce stade-là, on peut envisager une commande `\prisme[...]` où tous les paramètres définis dans le cahier des charges pourront être facilement modifiés.