`pst-caustic`
tracé de la caustique d'une lentille convexe

version : 0.3

Manuel Luque*

10 décembre 2 009 - 12 janvier 2 010

Résumé

`pst-caustic` est dédié aux tracés des rayons lumineux à travers une lentille plan-convexe, convexe-plan ou bi-convexe et de la caustique formé par les rayons transmis. Les rayons incidents sont parallèles à l'axe de la lentille.

Ce package comprend trois macros :

– `\pstDemoCaustic` pour l'étude mathématique de la caustique ;
– `\pstCaustic` pour le tracé d'un nombre fixé(par un paramètre) de rayons et de la caustique, différents autres paramètrages sont possibles, comme les rayons, l'épaisseur de la lentille, l'indice du verre, l'aspect de la lentille, la couleur des rayons et de la caustique, etc.

  La largeur du faisceau incident est automatiquement limité aux rayons incidents susceptibles d'être réfractés directement.

Les différents paramètres sont détaillés dans ce document.

Afin de faire des comparaisons, quelques images obtenues avec `PovRay`(avec leur listing) sont incluses dans la documentation.

Table des matières

*`manuel.luque27@gmail.com`

1 Les options(ou paramètres)

1.1 Le choix du type de lentille

- `\pstCaustic[lensType=planconvexe]` : la face d'entrée est plane.
- `\pstCaustic[lensType=convexeplan]` : la face d'entrée est convexe.
- `\pstCaustic[lensType=biconvexe]` : lentille biconvexe, R_1 est le rayon de la face d'entrée.
- `\pstCaustic[lensType=boule]` : lentille boule, R est le rayon de la boule.

1.2 Les options techniques

Paramètres	Défaut	Signification
`R`	5	rayon de la lentille à face plane
`R1`	5	rayon 1 de la lentille biconvexe
`R2`	5	rayon 2 de la lentille biconvexee
`thicknessratio`	0.25	coefficient d'épaisseur de la lentille : $e = 0.25 \times R$
`iN`	1.5	indice du verre
`rays`	20	nombre de rayons incidents sur une moitié de lentille
`xmin`	-2	abscisse de l'origine des rayons incidents
`xmax`	25	abscisse de l'extrémité des rayons transmis

1.3 Les options d'aspect(de style)

Elle sont définies par :

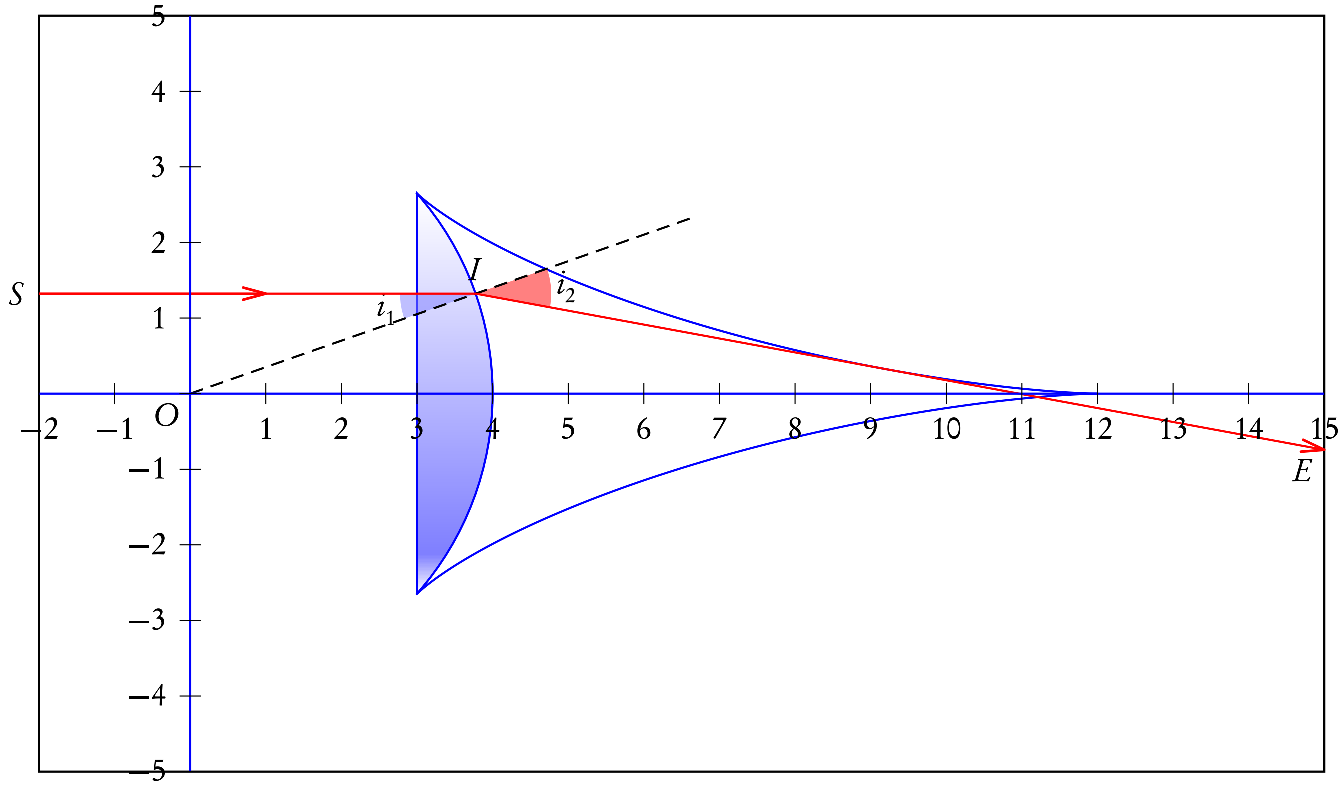
```
\newpsstyle{styleLens}{fillstyle=gradient,gradend=blue!50,gradbegin=white,linestyle=none}
\newpsstyle{styleRays}{linecolor=red,linewidth=0.5\pslinewidth}
\newpsstyle{styleCaustic}{linecolor=blue}
\newpsstyle{FillCaustic}{fillstyle=solid,fillcolor=yellow!50,linestyle=none}
```

et peuvent, bien sûr, être redéfinies, comme cela sera fait dans quelques exemples.

Paramètres	Défaut	Signification
`styleLens`	styleLens	aspect de la lentille
`styleRays`	styleRays	aspect des rayons
`styleCaustic`	styleCaustic	aspect de la caustique
`drawcaustic`	true	dessine la caustique
`fillcaustic`	false	colorie l'intérieur de la caustique

2 Lentilles plan-convexes

2.1 Étude géométrique



Déterminons l'équation cartésienne (Δ) du rayon émergeant de la lentille. Le paramètre en jeu est l'angle d'incidence i_1 compris entre 0 et l'angle limite $\lambda = \arcsin \frac{1}{n}$. On se sert, bien sûr, de la relation de Descartes : $n \sin i_1 = \sin i_2$ pour obtenir i_2 puis $\beta = i_1 - i_2$ la pente du rayon émergent.

$$y = x \tan \beta + R \sin i_1 - R \cos i_1 \tan \beta \tag{1}$$

Dérivons par rapport à i_1 cette équation, pour en déduire (Δ').

$$0 = x(\tan \beta)' + R \cos i_1 + R \sin i_1 \tan \beta - R \cos i_1 (\tan \beta)' \tag{2}$$

avec :

$$(\tan \beta)' = \left(1 + \tan^2\left(i_1 - \arcsin(n \sin i_1)\right)\right)\left(1 - \frac{n \cos i_1}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 i_1}}\right)$$

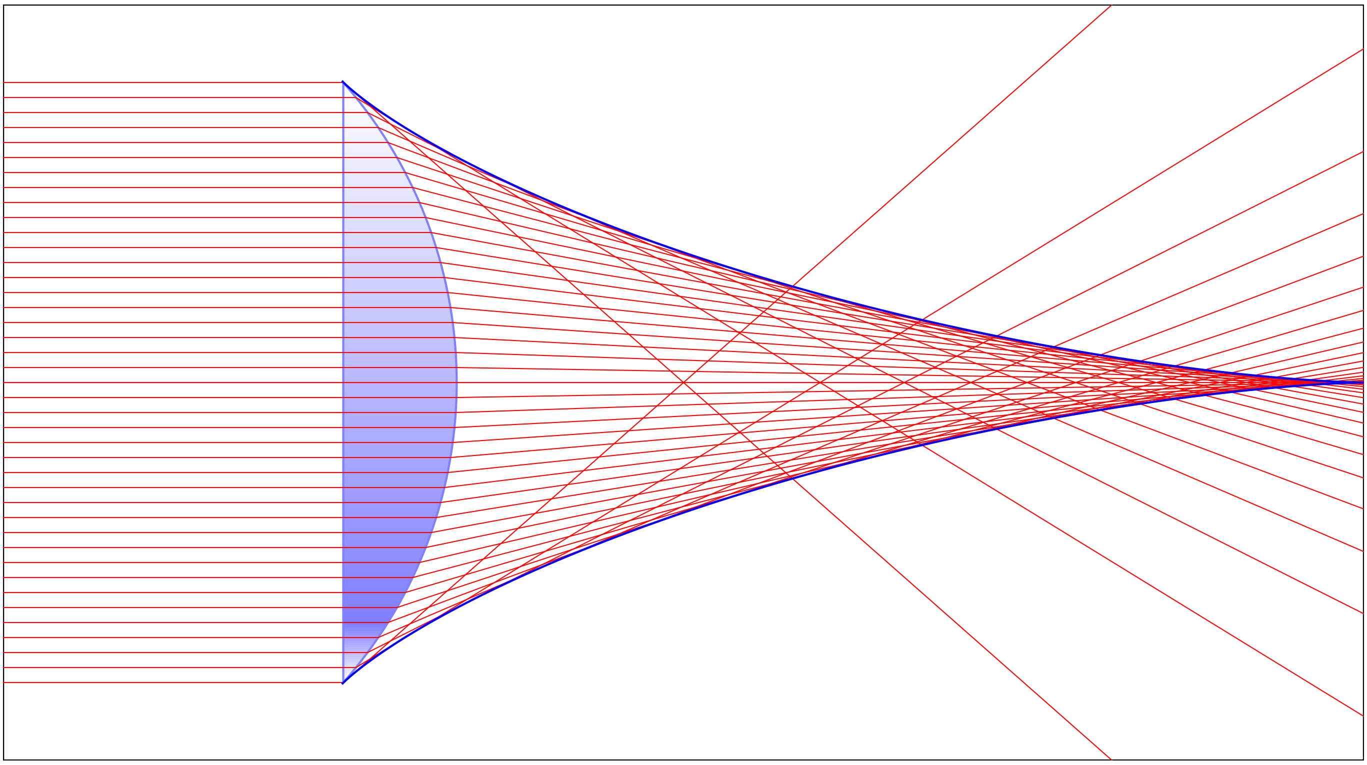
La résolution du système formé par les équations de (Δ) et (Δ') nous donne les équations paramétriques de l'enveloppe des rayons émergents, c'est à dire de la caustique de cette lentille.

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_E & = & R\dfrac{\cos i_1 (\tan \beta)' - \cos i_1 - \sin i_1 \tan \beta}{(\tan \beta)'} \\ y_E & = & x_E \tan \beta + R \sin i_1 - R \cos i_1 \tan \beta \end{array}\right. \tag{3}$$

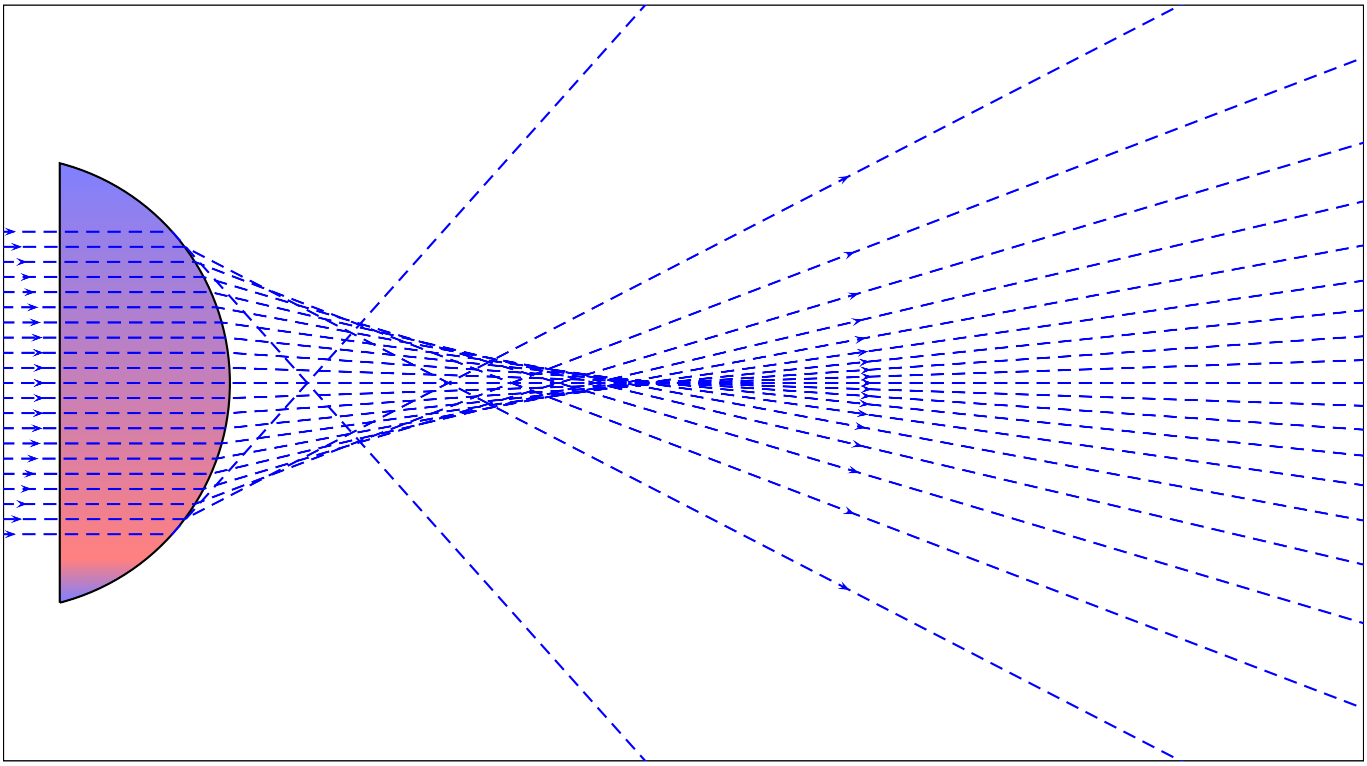
2.2 Exemples de tracé

C'est la lentille qui est choisie par défaut, il est donc inutile de préciser son type `lensType=planconvexe`.

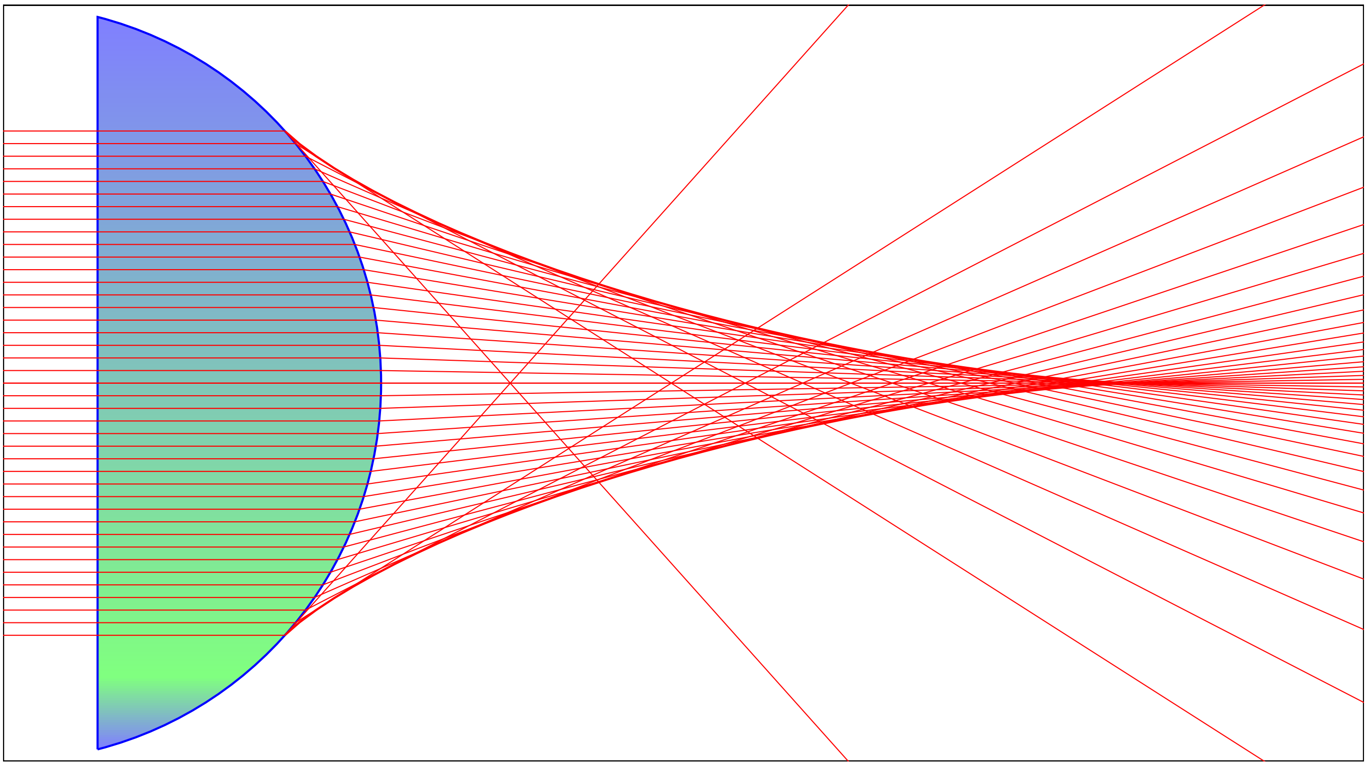
```
\begin{pspicture*}(0,-5)(18,5)
\psframe(0,-5)(18,5)
\pstCaustic
\end{pspicture*}
```



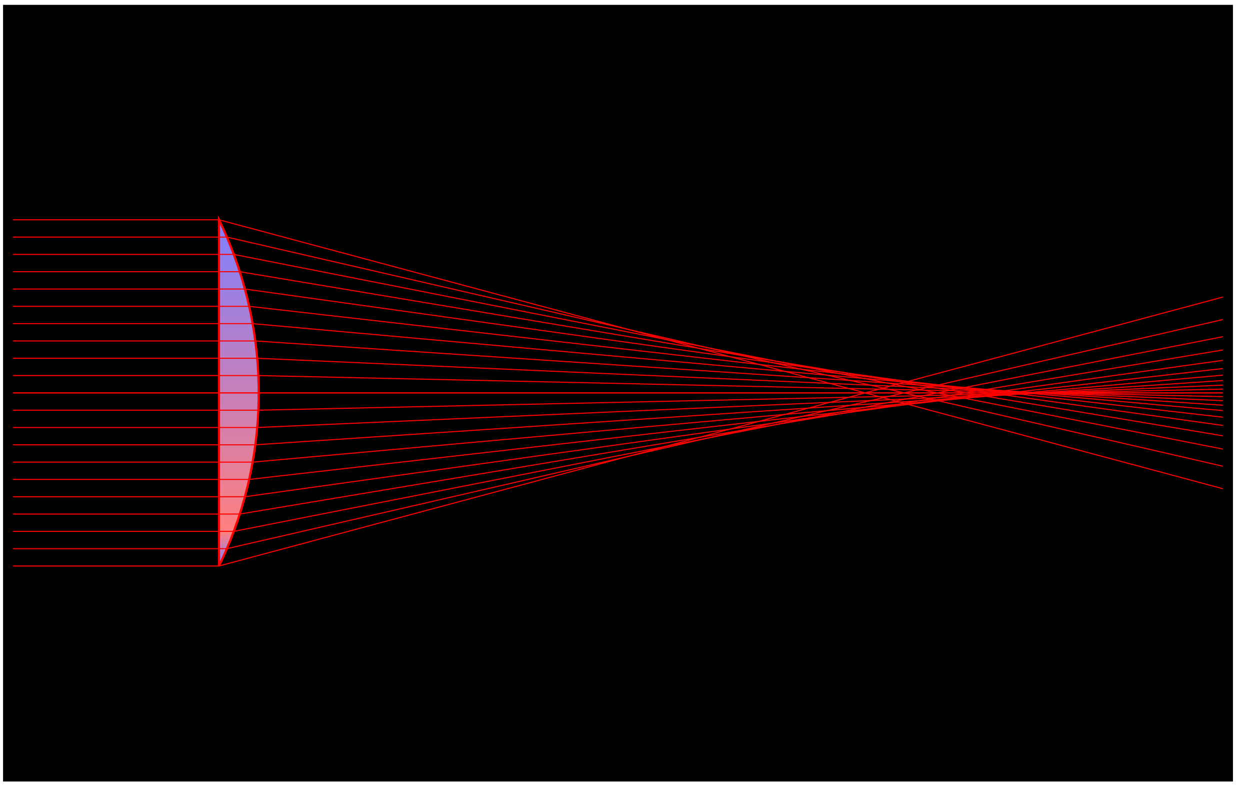
```
\newpsstyle{styleLens2}{fillstyle=gradient,gradend=red!50,gradbegin=blue!50}
\newpsstyle{styleRays2}{linecolor=blue,linestyle=dashed,ArrowInside=->}
\begin{pspicture*}(0,-5)(18,5)
\psframe(0,-5)(18,5)
\pstCaustic[rays=10,R=3,thicknessratio=0.75,styleLens=styleLens2,styleRays=styleRays2,
  drawcaustic=false]
\end{pspicture*}
```



```
\newpsstyle{styleLens3}{fillstyle=gradient,gradend=green!50,gradbegin=blue!50,linecolor=
  blue}
\newpsstyle{styleCaustic2}{linecolor=red}
\begin{pspicture*}(0,-5)(18,5)
\psframe(0,-5)(18,5)
\pstCaustic[rays=20,R=5,thicknessratio=0.75,styleLens=styleLens3,styleCaustic=styleCaustic
  2]
\end{pspicture*}
```



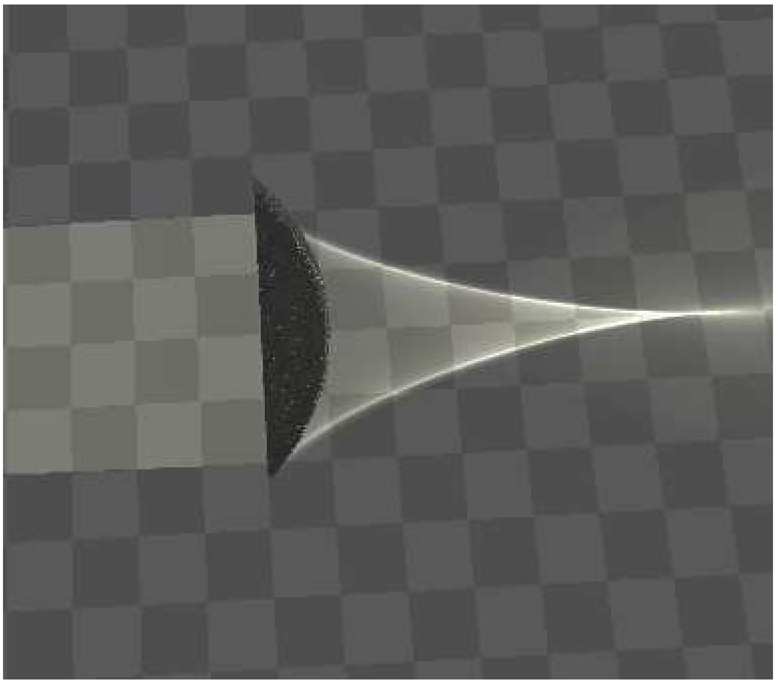
```
\newpsstyle{styleLens3}{fillstyle=gradient,gradend=red!50,gradbegin=blue!50,linecolor=red}
\psframebox[fillstyle=solid,fillcolor=black]{%
\begin{pspicture*}(2,-5)(18,5)
\pstCaustic[drawcaustic=false,R=7,thicknessratio=0.1,unit=0.75,rays=10,styleLens=styleLens
  3,xmax=25]
\end{pspicture*}}
```



2.3 Une simulation avec PovRay

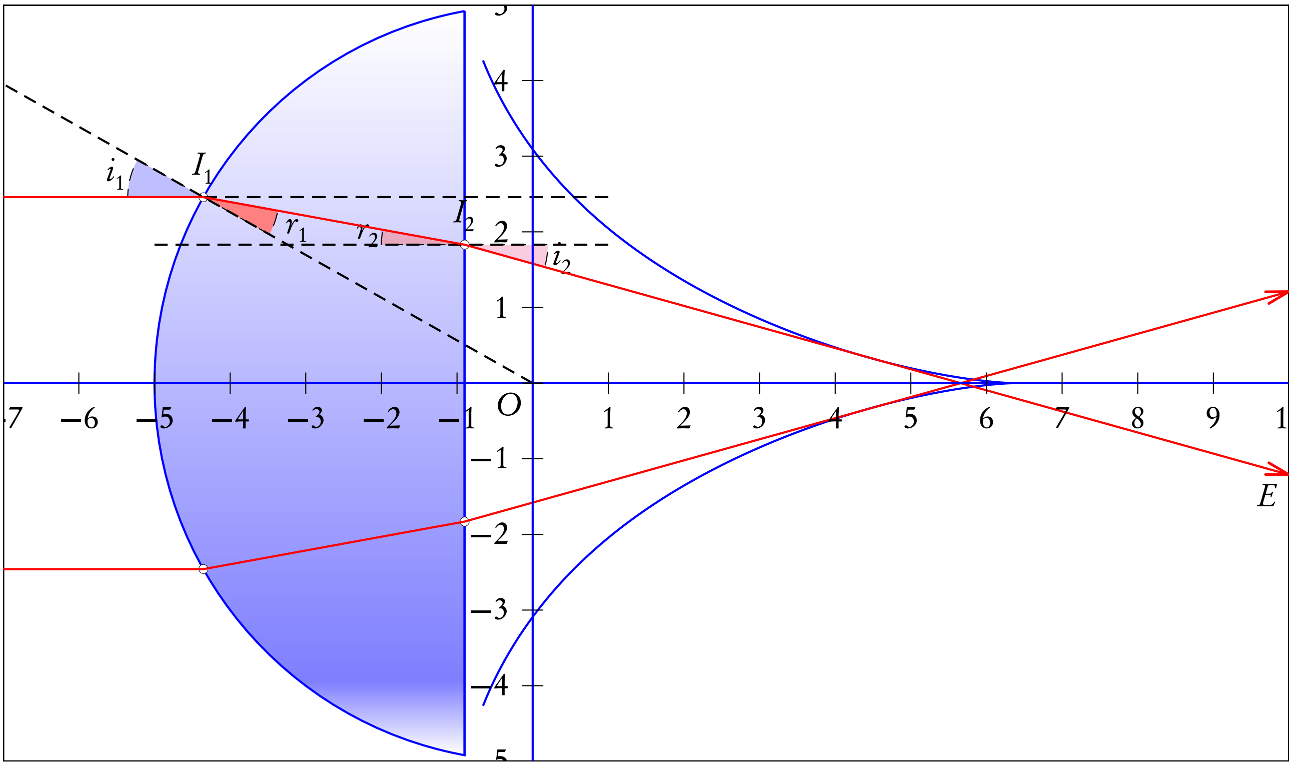
```
#include "colors.inc"
#include "textures.inc"
#include "glass.inc"
global_settings {
assumed_gamma 1
photons {
count 2000000
autostop 0
jitter 0
}
}
camera {
    location <2,12,-0.1>
    look_at <0,0,0>
}
light_source { <0,2,-20> // Source
color <1,1,0.8>
cylinder
 radius 0
 falloff 2
 tightness 0
```

```
 point_at <0,0,0>
 fade_distance 50
 fade_power 2
}
plane{ <0,1,0>, 0
   pigment {checker White Wheat}
     }
intersection {
        cylinder {
        <0,0,-2>
        <0,1,-2>
        3
    }
    box {
        <3,0,1>
        <-3,1,0>
    }
 texture{T_Glass3}
 interior { ior 1.5 }
photons {
target
reflection off
refraction on
}
}
```



3 Lentilles convexes-planes

3.1 Étude géométrique



La lentille est définie par son rayon R et son épaisseur au centre e et son indice moyen n. Calculons l'angle de réfraction r_1 dans la lentille :

$$\sin i_1 = n \sin r_1 \Longrightarrow \sin r_1 = \frac{\sin r_1}{n}$$

Dans une deuxième étape, nous calculons les coordonnées du point d'intersection (I_2) du rayon réfracté avec la face plane de la lentille. En désignant par $\beta = r1 - r_2$ l'angle que fait le rayon I_1I_2 avec l'horizontale et par y_1 le paramètre fixant la position du rayon incident :

avec $\sin i_1 = \dfrac{y_1}{R}$, $b_1 = y_1 - x_1 \tan\beta$ et $x_1 = -\sqrt{R^2 - y_1^2}$, on en déduit les coordonnées de $I_(x_2, y_2)$:

$$\begin{cases} x_2 &= e - R \\ y_2 &= (e-R)\tan\beta + b_1 \end{cases}$$

Déterminons l'équation (Δ) du rayon émergent (I_2E), avec $n \sin r_2 = \sin i_1$ et $b_2 = y_2 + x_2 \tan i_2$:

$$\boxed{(\Delta) \qquad y = -x \tan i_2 + b_2}$$

Pour obtenir l'équation de la caustique, dérivons (Δ) par rapport à y_1 :

$$\boxed{(\Delta)' \qquad 0 = -x(\tan i_2)' + (b_2)'}$$

Avec :

$$(b_2)' = \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 - y_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{n^2R^2 - y_1^2}}\right)\left(-\frac{x_2}{\cos^2 r_2} + 1 + \frac{x_1}{\cos^2 r_2} + \frac{x_2 n \cos r_2}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 r_2}} + \frac{x_2 n^3 \sin^2 r_2 \cos r_2}{(1 - n^2 \sin^2 r_2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

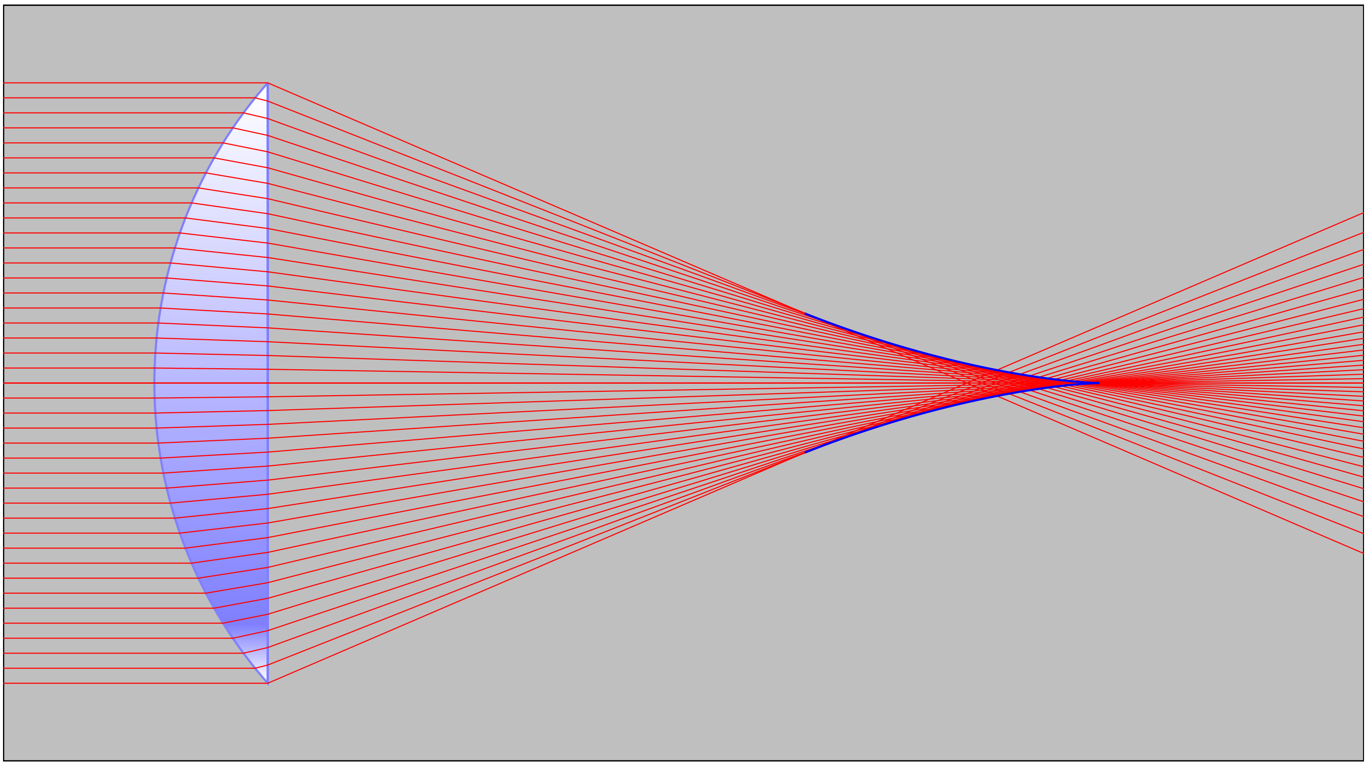
$$(\tan i_2)' = \frac{n\,\cos r_2 (-\sqrt{n^2 R^2 - y_1^2} + \sqrt{R^2 - y_1^2})}{(1 - n^2 \sin^2 r_2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{R^2 - y_1^2}\,\sqrt{n^2 R^2 - y_1^2}}$$

La résolution du système $\{(\Delta), (\Delta)'\}$, nous fournit les équations paramétriques de la caustique, on fait varier le paramètre y_1 en fonction de l'ouverture de la lentille ou du diaphragme choisi :

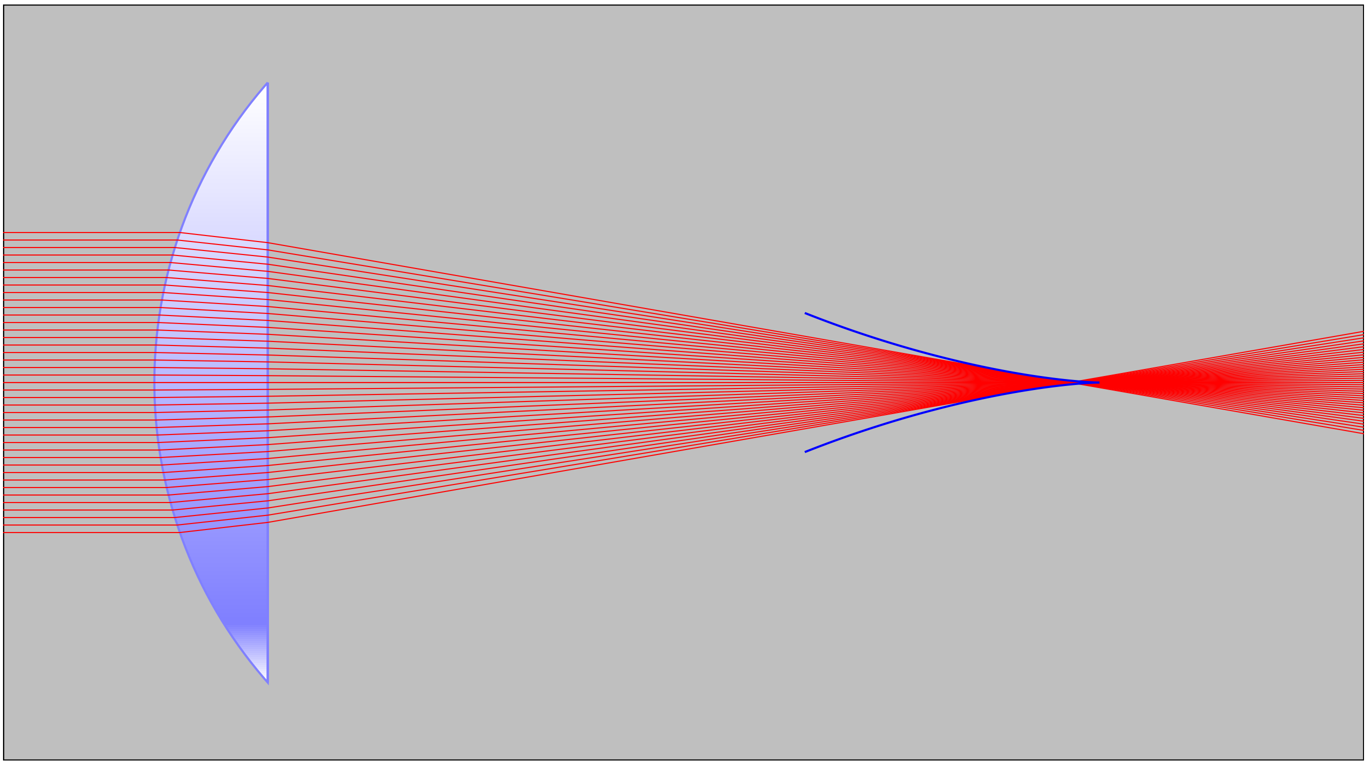
$$\begin{cases} {\color{red}x_C} & = & -\dfrac{(b_2)'}{(\tan i_2)'} \\ {\color{blue}y_C} & = & -x \tan i_2 + b_2 \end{cases}$$

3.2 Exemples de tracé

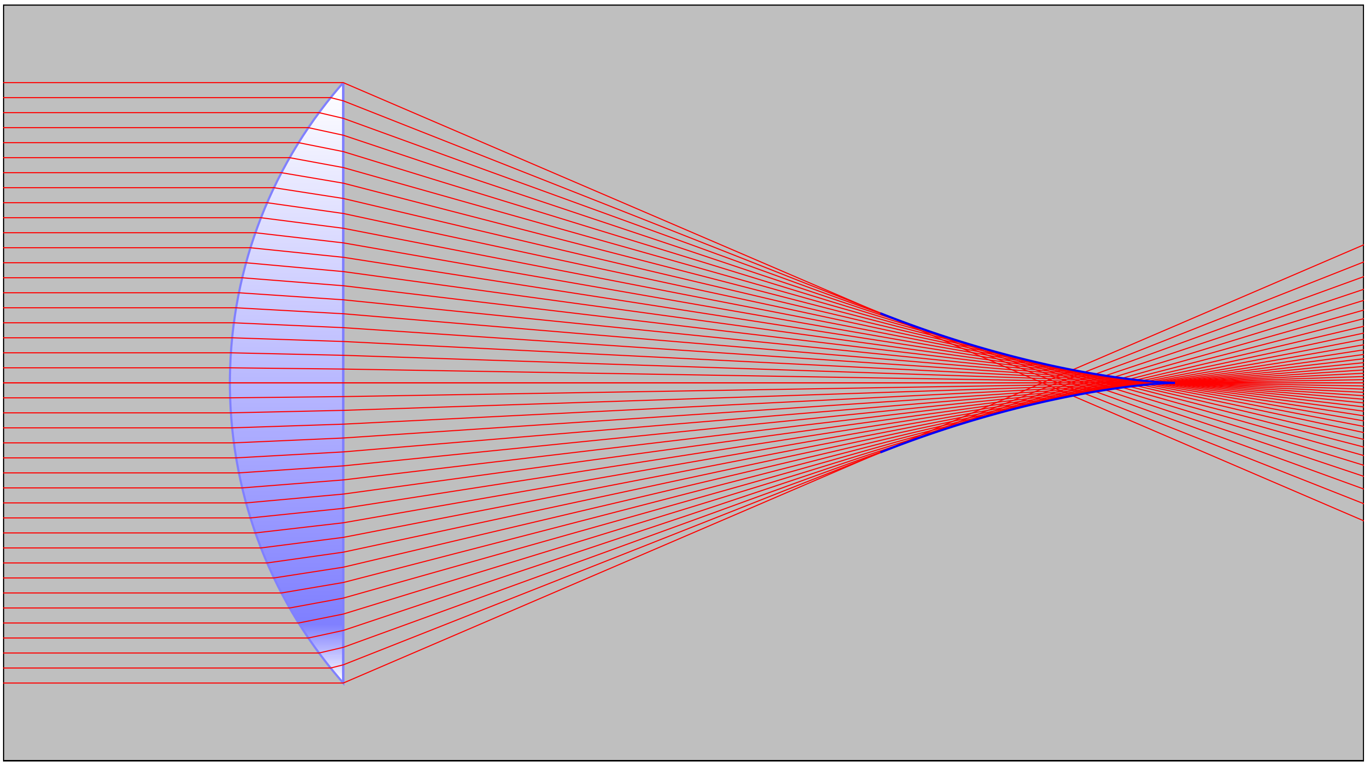
```
\begin{pspicture*}(-8,-5)(10,5)
\psframe[fillstyle=solid,fillcolor=gray!50](-8,-5)(10,5)
\pstCaustic[lensType=convexeplan,xmin=-10]%
\end{pspicture*}
```



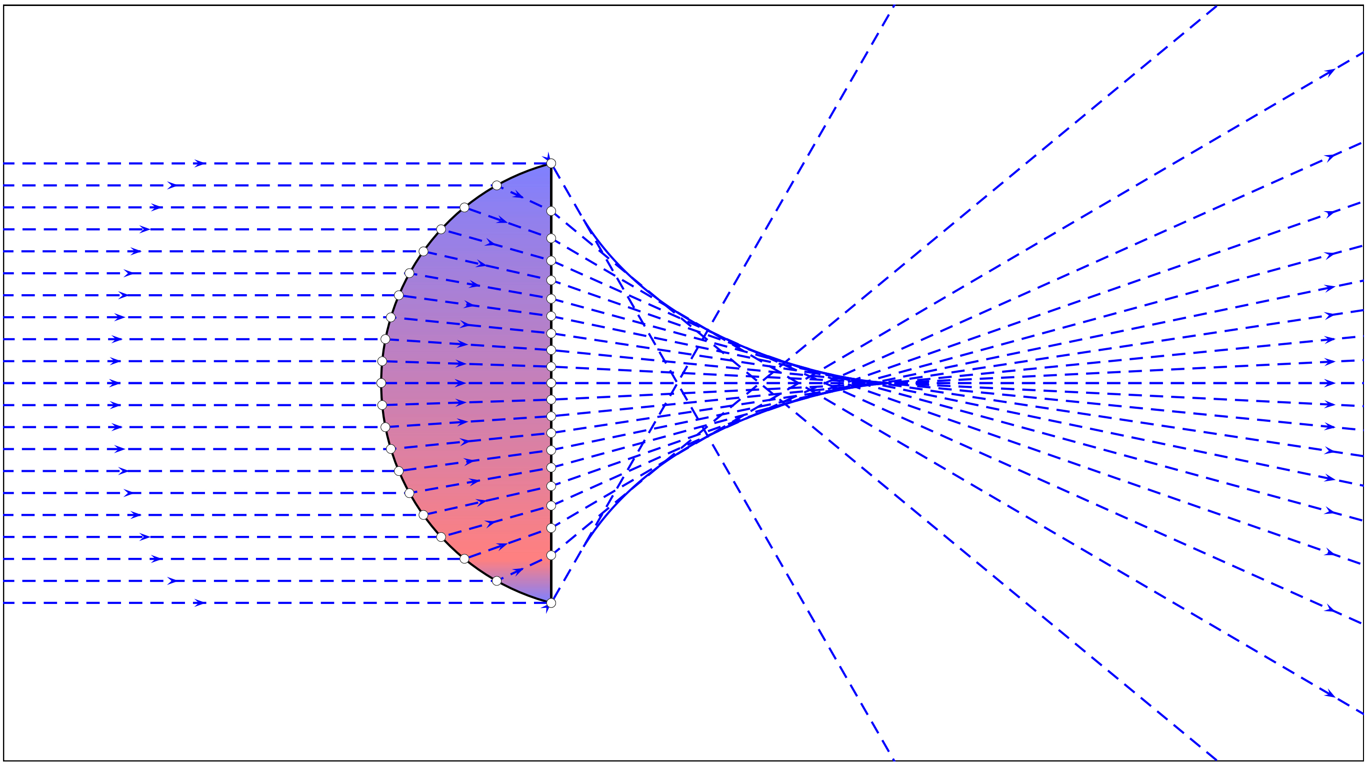
```
\begin{pspicture*}(-8,-5)(10,5)
\psframe[fillstyle=solid,fillcolor=gray!50](-8,-5)(10,5)
\pstCaustic[lensType=convexeplan,diaphragm=0.5,xmin=-10]
\end{pspicture*}
```



```
\begin{pspicture*}(-9,-5)(9,5)
\psframe[fillstyle=solid,fillcolor=gray!50](-9,-5)(9,5)
\pstCaustic[lensType=convexeplan,xmin=-9]
\end{pspicture*}
```



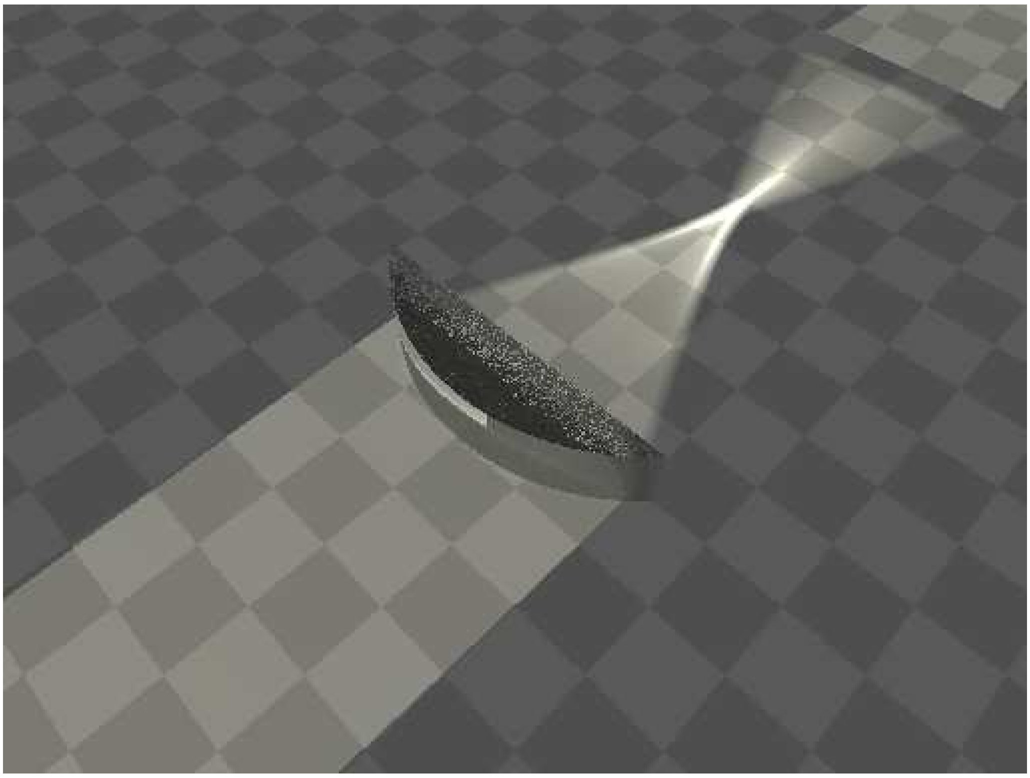
```
\newpsstyle{styleLens2}{fillstyle=gradient,gradend=red!50,gradbegin=blue!50,linestyle=solid
  }
\newpsstyle{styleRays2}{linecolor=blue,linestyle=dashed,ArrowInside=->}
\begin{pspicture*}(-8,-5)(10,5)
\psframe(-8,-5)(10,5)
\pstCaustic[lensType=convexeplan,rays=10,R=3,thicknessratio=0.75,styleLens=styleLens2,
  styleRays=styleRays2,showpoints=true,xmin=-10]
\end{pspicture*}
```



3.3 Une simulation avec PovRay

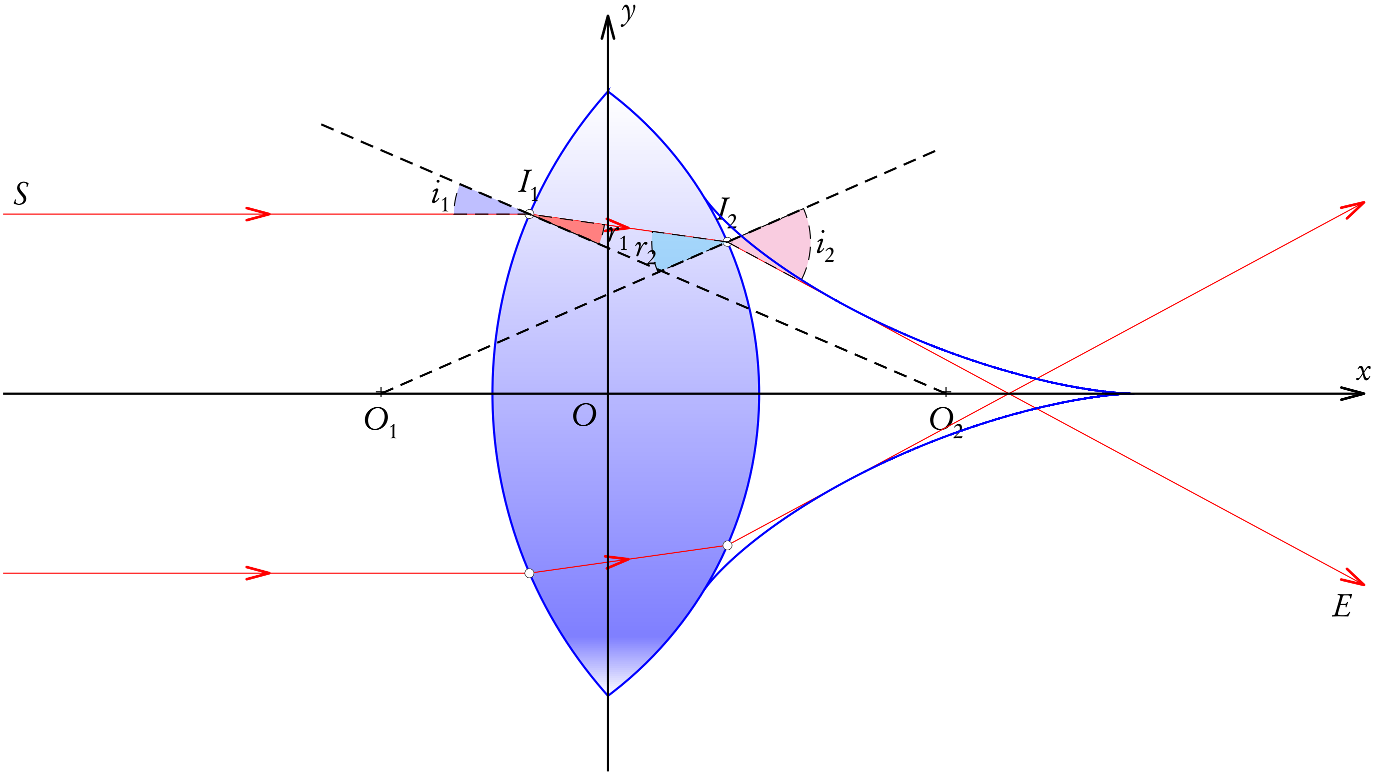
```
#include "colors.inc"
#include "textures.inc"
#include "glass.inc"      //  !!!! ---> T_Glass3
global_settings {
assumed_gamma 1
photons {
spacing 0.01
autostop 0
jitter 0
}
}
camera {
    location <4,8,-4>
    look_at <0,0,0>
}
light_source { <0,2,-20> // Source
color 1.5*<1,1,0.8>
cylinder
radius 0
falloff 2
```

```
tightness 0
point_at <0,0,0>
fade_distance 50
fade_power 2
}
plane{ <0,1,0>, 0
    pigment {checker color Gray, color White}
     }
intersection {
        cylinder {
        <0,0,-2>
        <0,1,-2>
        3
    }
    box {
        <3,0,1>
        <-3,1,0>
    }
 rotate y*180
 texture{T_Glass3}
 interior { ior 1.5 }
photons {
target
reflection off
refraction on
}
```



4 Lentilles biconvexes

4.1 Étude géométrique



La lentille biconvexe est définie par les rayons $R1$ et R_2 des deux faces ainsi que par la position du centre de la face 1 : $x_{O_1} < 0$ (valeur qui doit être négative). La position du centre $x_{O_2} > 0$ de la face 2 est calculé de façon à ce que l'axe Oy passe par l'intersection des deux cercles(sphères en 3 dimensions). Il est évident qu'il est nécessaire que $|x_{O_1}| < R_1$, en cas d'erreur sa valeur est fixée arbitrairement à $x_{O_1} = -R_1 + 0,5$.

Le rayon incident est fixé par y_1 abscisse du point d'incidence sur la face 1 I_1, on ne conserve que les valeurs permettant une sortie directe du rayon. Les calculs sont classiques :

$$\sin i_1 = \frac{y_1}{R_2} \quad , \quad \sin r_1 = \frac{\sin i_1}{n} \quad , \quad I_1(x_1 = -\sqrt{R_2^2 - y_1^2} + x_{O_2}, y_1)$$

Équation de (I_1I_2) : $y = x \tan\alpha + b_1$ avec $\alpha = r_1 - i_1$ et $b_1 = y_1 - x_1 \tan\alpha$.

Le calcul des coordonnées de I_2 nécessitent la résolution de l'équation du second degré suivante :

$$(x - x_{O_1})^2 + (x \tan\alpha + b_1)^2 = R_1^2$$

$$(1 + \tan^2\alpha)x^2 + 2(-x_{O_1} + b_1 \tan\alpha)x + x_{O_1}^2 + b_1^2 - R_1^2 = 0$$

On pose $A = 1 + \tan^2\alpha$, $B' = -x_{O_1} + b_1 \tan\alpha$, $C = x_{O_1}^2 + b_1^2 - R_1^2$ et $\Delta' = \sqrt{B'^2 - A \cdot C}$ le discriminant réduit. On en déduit les deux valeurs possibles de x_2, c'est la valeur positive qui nous intéresse.

Équation du rayon émergent (I_2E) :

$$\boxed{(\Delta) \qquad y = x \tan\beta + b_2}$$

avec β et b_2 déterminés ainsi :

Soit $\sin\alpha_1 = \dfrac{y_2}{R_2}$, on en déduit $r_2 = i_1 - r_1 + \alpha_1$ puis i_2 avec $\sin i_2 = n\sin r_2$ et enfin $\beta = \alpha_1 - i_2$ et $b_2 = y_2 - x_2\tan\beta$.

Pour obtenir l'équation de la caustique, dérivons (Δ) par rapport à y_1 :

$$\boxed{(\Delta)' \qquad 0 = -x(\tan\beta)' + (b_2)'}$$

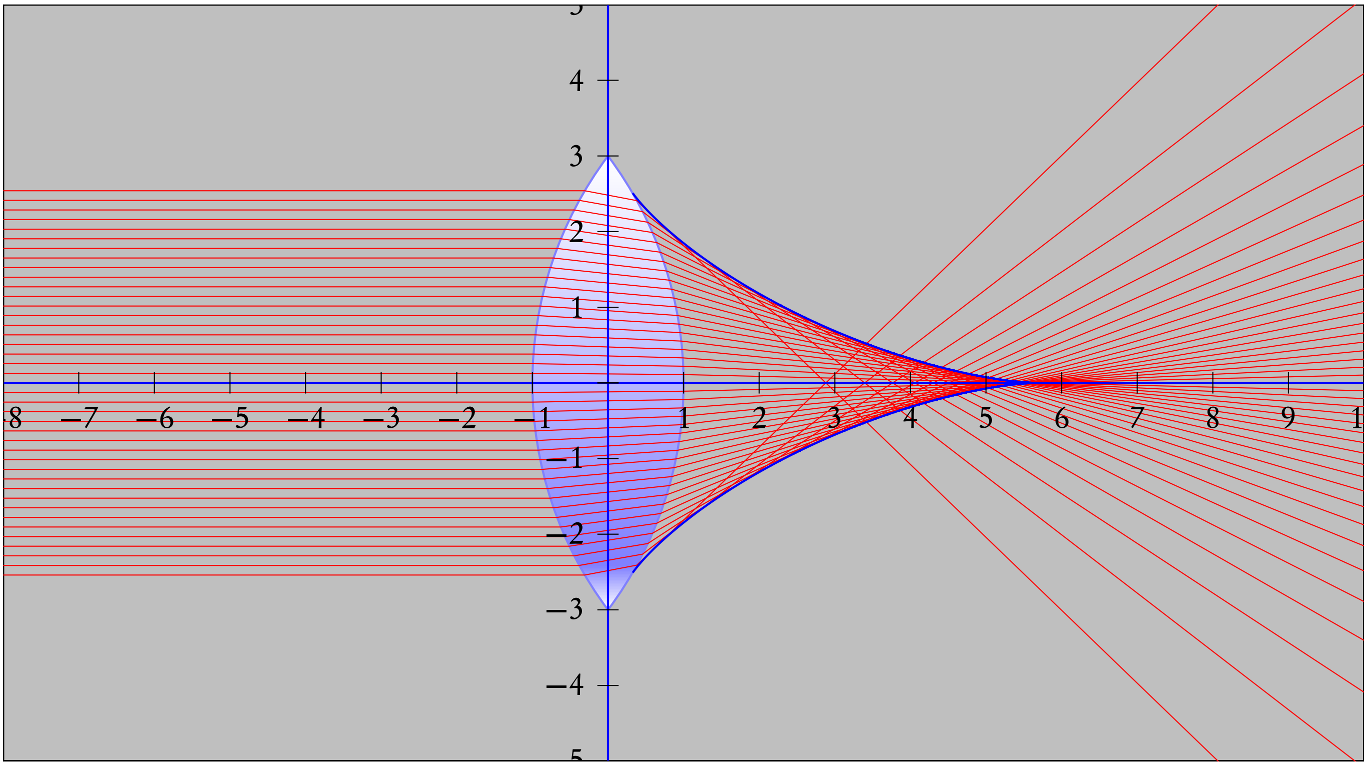
Le calcul des dérivés sera fait, cette fois-ci, numériquement car les expressions des dérivées sont bien trop compliquées pour être utilisables directement.

La résolution du système $\{(\Delta),(\Delta)'\}$, nous fournit les équations paramétriques de la caustique, on fait varier le paramètre y_1 en fonction de l'ouverture de la lentille ou du diaphragme choisi :

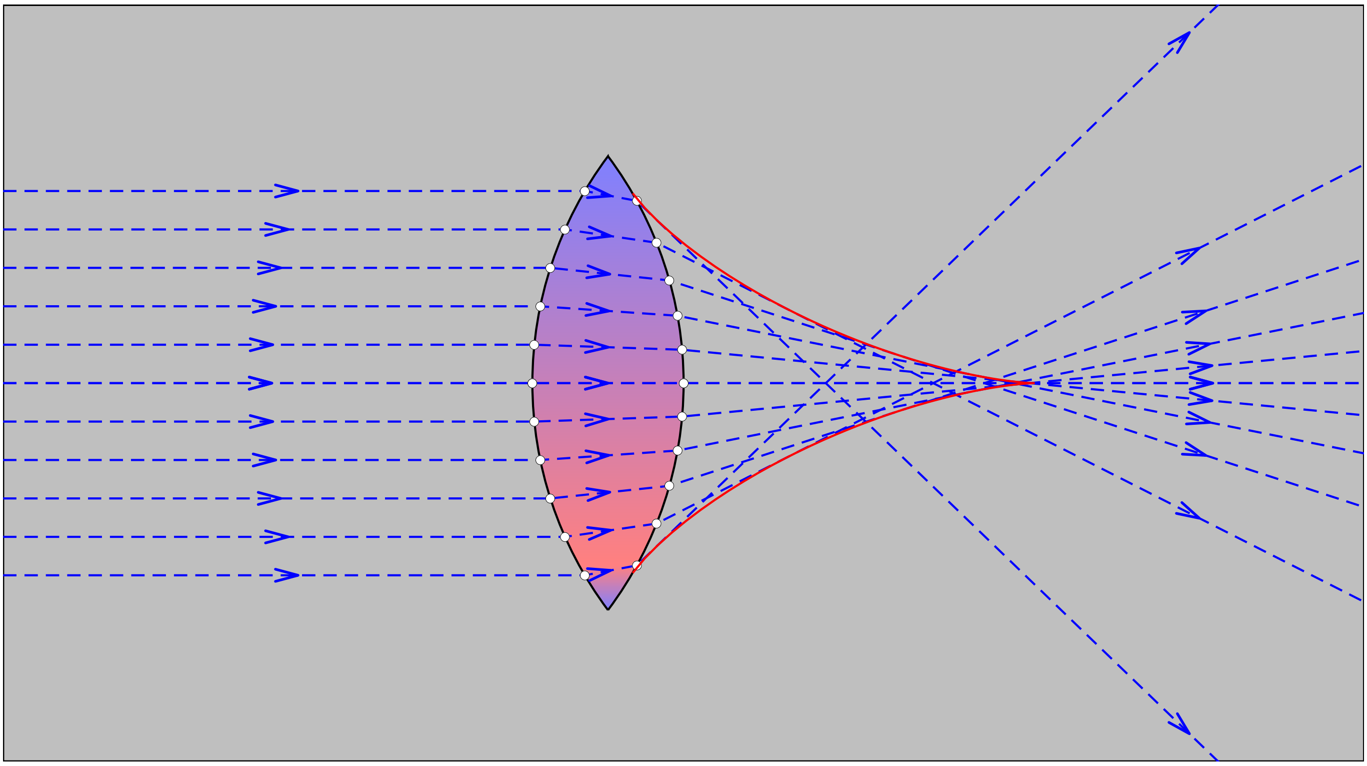
$$\left\{\begin{array}{rcl} x_C & = & -\dfrac{(b_2)'}{(\tan\beta)'} \\ y_C & = & -x\tan\beta + b_2 \end{array}\right.$$

4.2 Étude de tracés

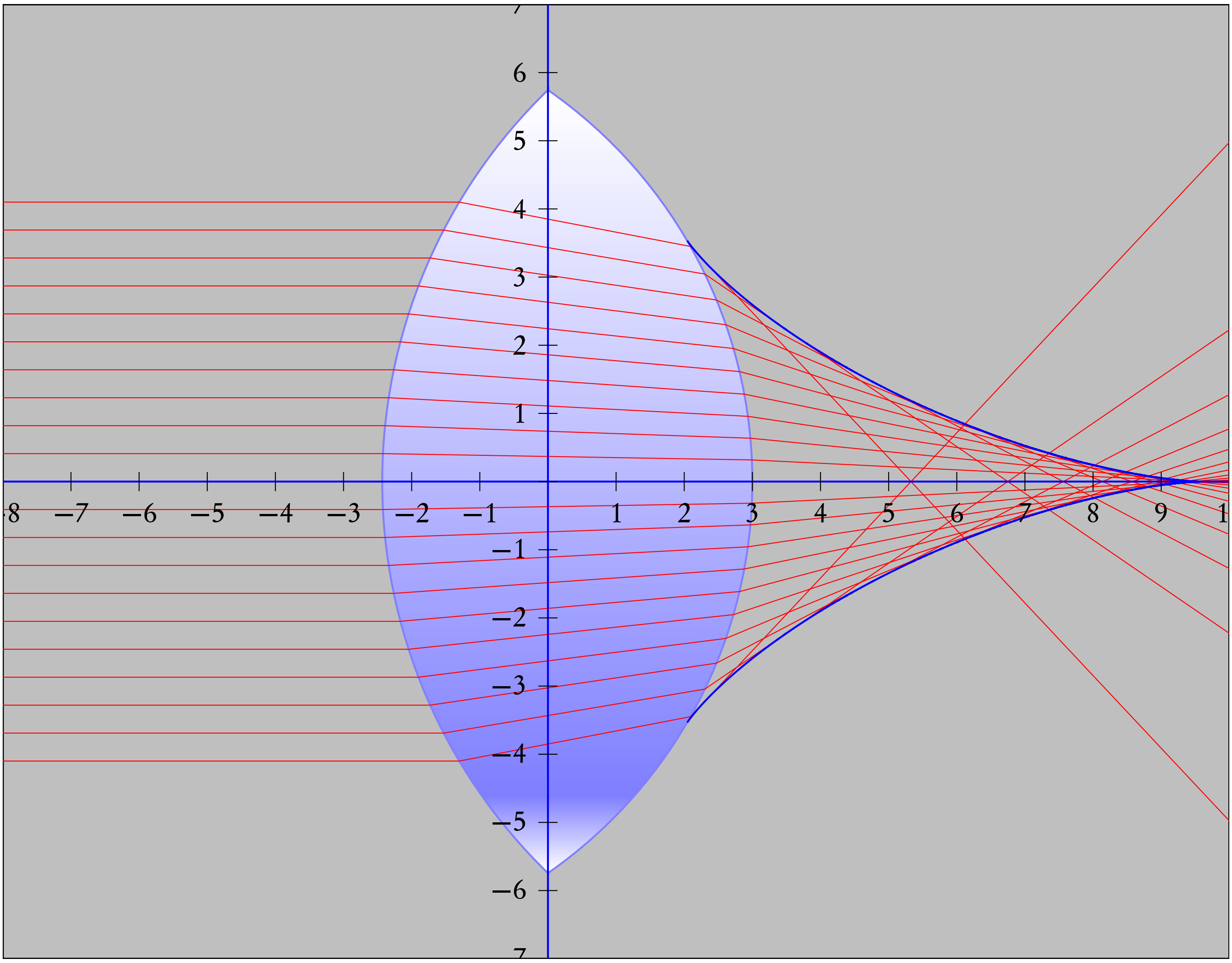
```
\begin{pspicture*}(-8,-5)(10,5)
\psframe[fillstyle=solid,fillcolor=gray!50](-8,-5)(10,5)
\pstCaustic[lensType=biconvexe,xmax=10,xmin=-8]
\psaxes[ylabelPos=left,linecolor=blue](0,0)(-8,-5)(10,5)
\end{pspicture*}
```



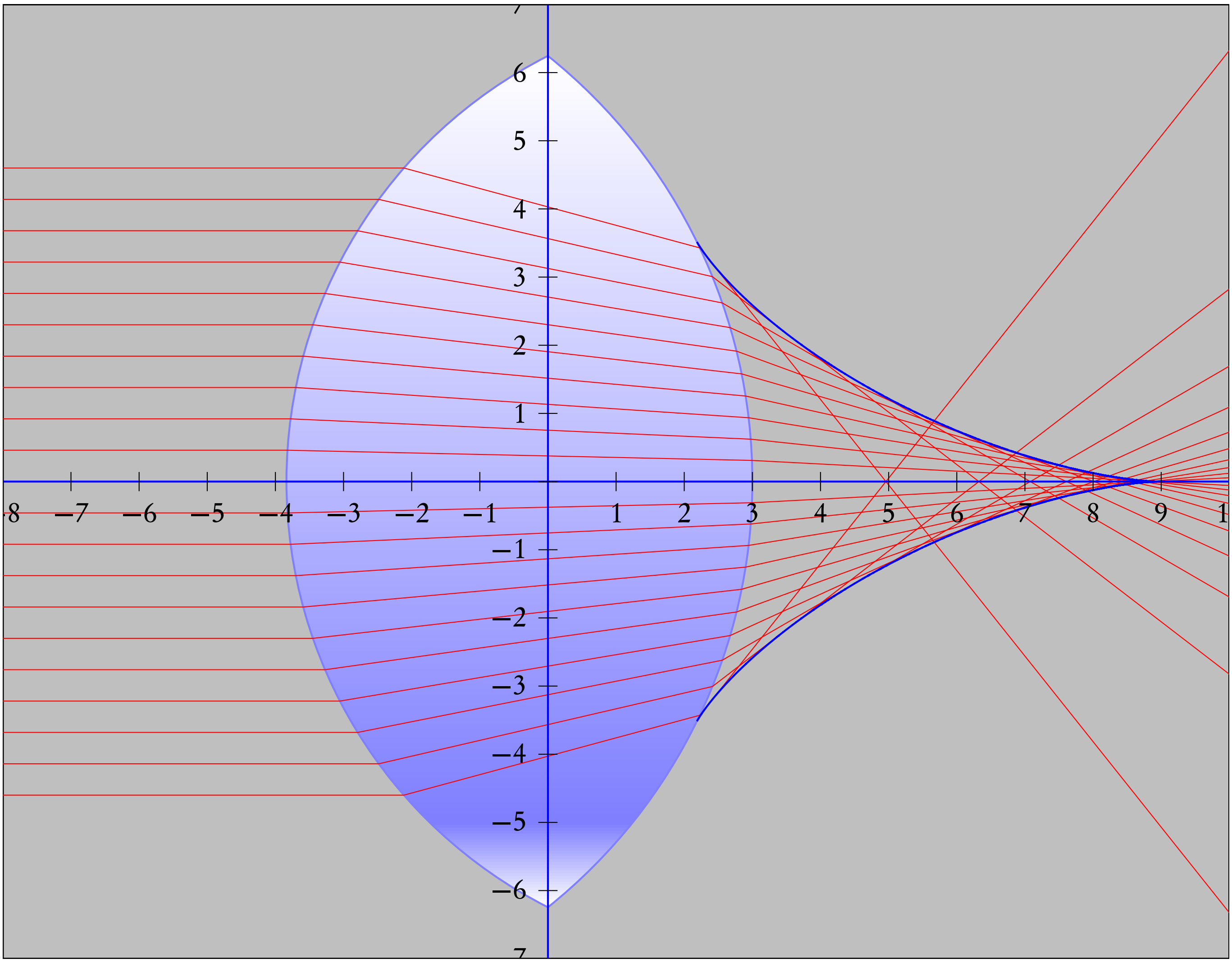
```
\newpsstyle{styleLens2}{fillstyle=gradient,gradend=red!50,gradbegin=blue!50,linestyle=solid
  }
\newpsstyle{styleRays2}{linecolor=blue,linestyle=dashed,ArrowInside=-v}
\newpsstyle{styleCausticR}{linecolor=red}
\begin{pspicture*}(-8,-5)(10,5)
\psframe[fillstyle=solid,fillcolor=gray!50](-8,-5)(10,5)
\pstCaustic[rays=5,styleLens=styleLens2,styleRays=styleRays2,showpoints=true,xmax=15,
  styleCaustic=styleCausticR,lensType=biconvexe,xmin=-8]
\end{pspicture*}
```



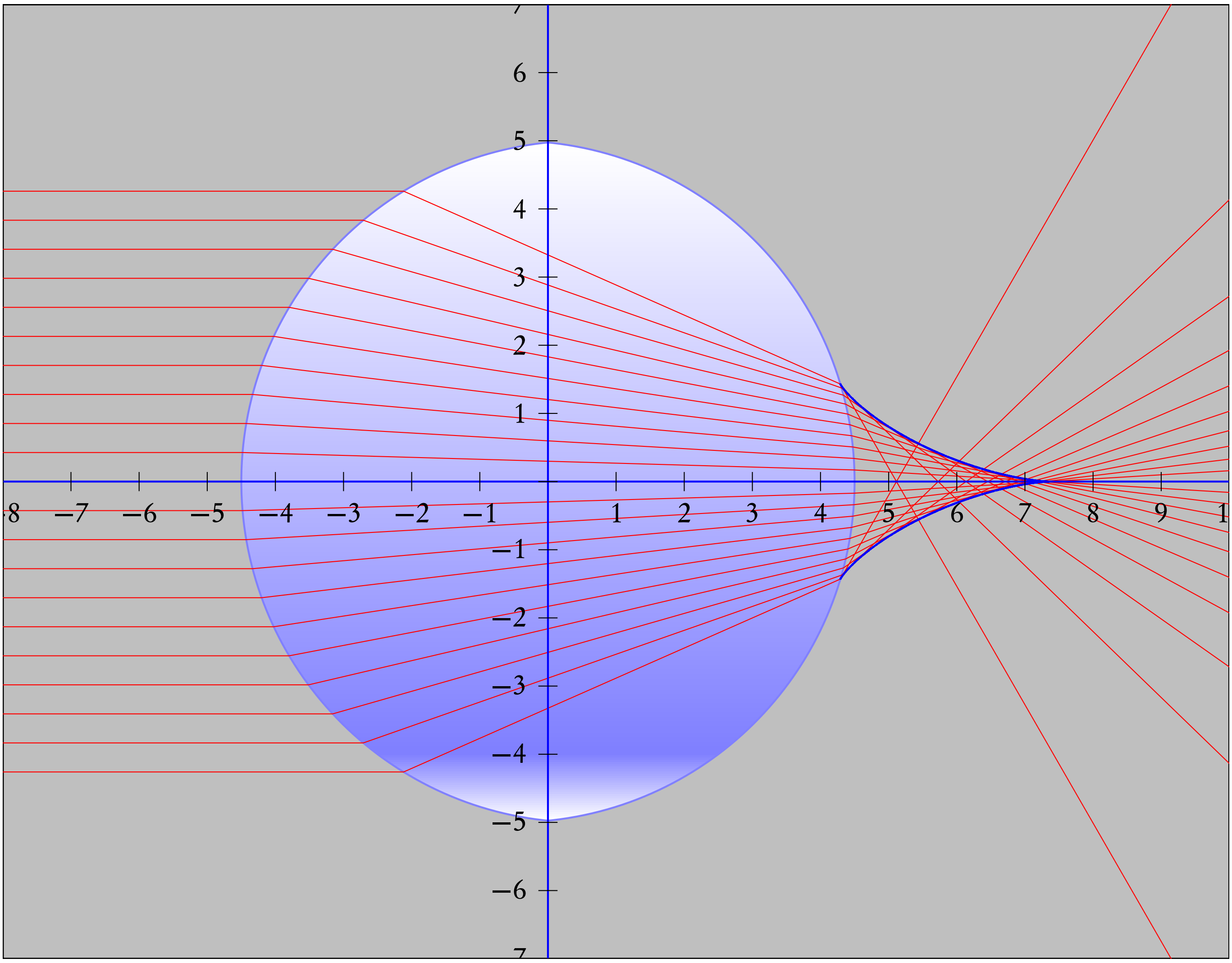
```
\begin{pspicture*}(-8,-7)(10,7)
\psframe[fillstyle=solid,fillcolor=gray!50](-8,-7)(10,7)
\pstCaustic[rays=10,xmax=10,R1=7,R2=8,x01=-4,lensType=biconvexe,xmin=-8]
\psaxes[ylabelPos=left,linecolor=blue](0,0)(-8,-7)(10,7)
\end{pspicture*}
```



```
\begin{pspicture*}(-8,-7)(10,7)
\psframe[fillstyle=solid,fillcolor=gray!50](-8,-7)(10,7)
\pstCaustic[rays=10,xmax=10,R1=8,R2=7,x01=-5,lensType=biconvexe,xmin=-8]
\psaxes[ylabelPos=left,linecolor=blue](0,0)(-8,-7)(10,7)
\end{pspicture*}
```



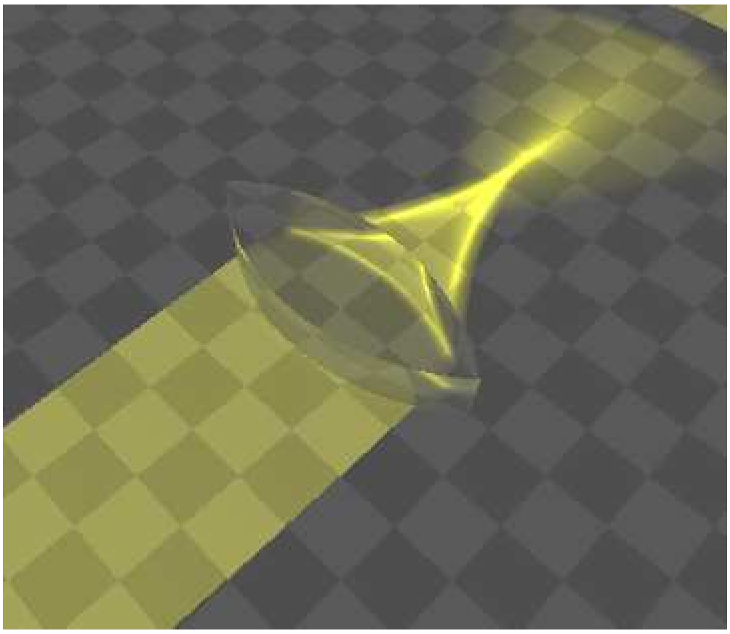
```
\begin{pspicture*}(-8,-7)(10,7)
\psframe[fillstyle=solid,fillcolor=gray!50](-8,-7)(10,7)
\pstCaustic[rays=10,xmax=10,R1=5,R2=5,x01=-0.5,lensType=biconvexe,xmin=-8]
\psaxes[ylabelPos=left,linecolor=blue](0,0)(-8,-7)(10,7)
\end{pspicture*}
```



4.3 Une simulation avec `PovRay`

```
#include "colors.inc"
#include "textures.inc"
#include "glass.inc"      //  !!!! ---> T_Glass3
global_settings {
assumed_gamma 1
photons {
spacing 0.01
autostop 0
jitter 0
}
}
camera {
    location <5,10,-5>
    look_at <0,0,0>
```

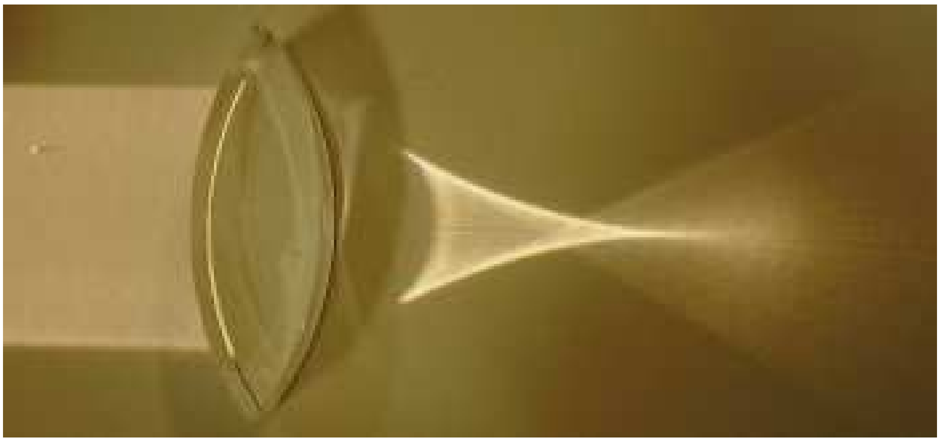
```
}
light_source { <0,2,-20>
color 2.5*<1,1,0>
cylinder
radius 10
falloff 2
tightness 0
point_at <0,0,0>
fade_distance 50
fade_power 2
}
plane{ <0,1,0>, 0
    pigment {
      checker color Gray, color White
    }
     }
intersection {
        cylinder {
        <0,0,-3>
        <0,1,-3>
        4
    }
    cylinder {
        <0,0,3>
        <0,1,3>
        4
    }
 texture{T_Glass3}
 interior { ior 1.5 }
photons {
target
reflection off
refraction on
}
}
```



4.4 Une photographie

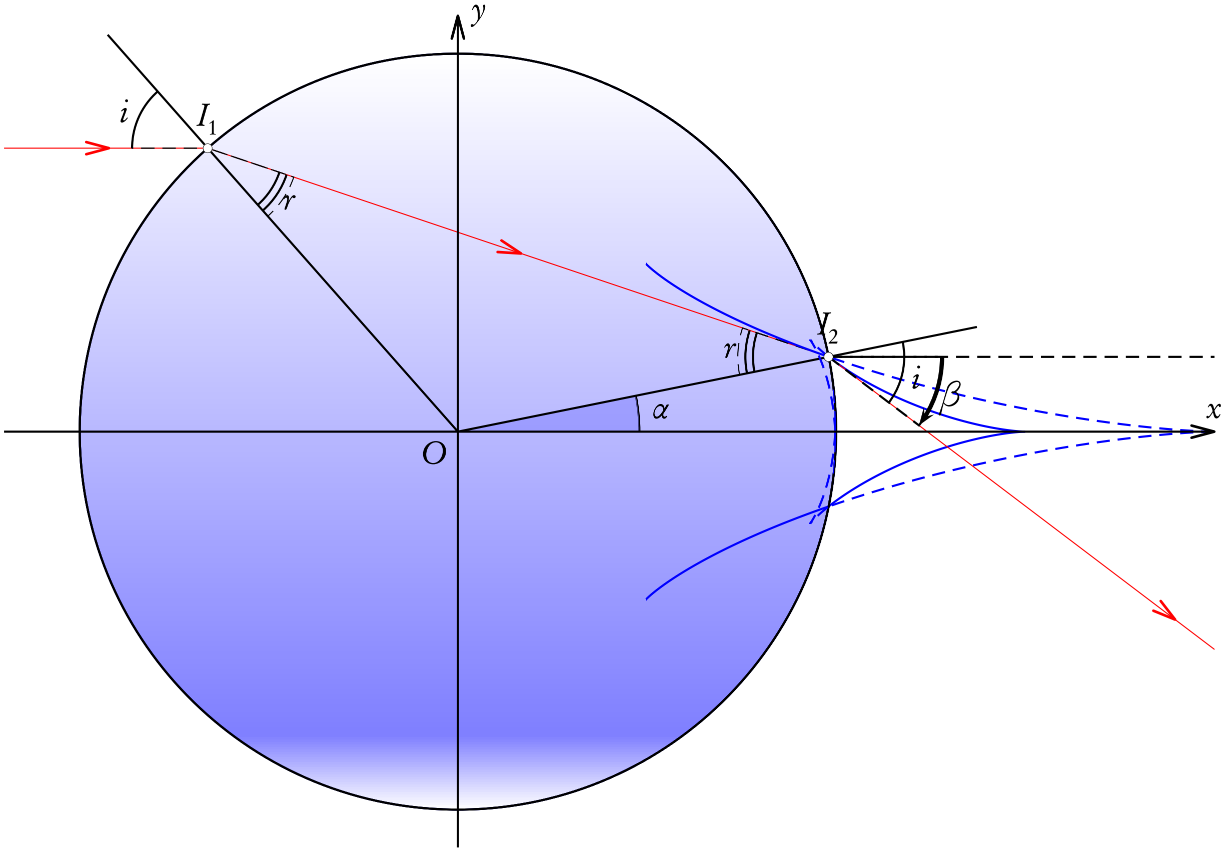
Extraite du site :

`http://lycees.ac-rouen.fr/malraux/labophychim/aberdiffrac/index.htm`



5 Caustique d'une lentille boule

5.1 Étude géométrique



Pour déterminer l'équation du rayon émergent (Δ), nous avons besoin des coordonnées de I_1, I_2, des angles α et β. Le paramètre que nous ferons varier est i, $0 \leqslant i < 90°$.

$$I_1(-R\cos i, R\sin i) \quad ; \quad I_2(R\cos\alpha, R\sin\alpha) \quad ; \quad \alpha = 2r - i \quad ; \quad r = \arcsin\left(\frac{\sin i}{n}\right) \quad ; \quad \beta = 2(r-i)$$

$$(\Delta) : \quad y = x\tan\beta + b \quad ; \quad b = R\sin\alpha - R\cos\alpha\tan\beta$$

Calculons la dérivée de (Δ) par rapport à i, elle est notée $(\Delta)'$. On commence par les dérivées de $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, β, et $\tan\beta$.

$$(\alpha)' = \frac{2\cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} - 1$$

$$(\cos\alpha)' = -(\sin\alpha)(\alpha)'$$

$$(\sin\alpha)' = (\cos\alpha)(\alpha)'$$

$$\beta' = \frac{2\cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} - 2 = (\alpha)' - 1$$

$$(\tan\beta)' = \left(1 + \tan^2\beta\right)(\beta)'$$

$$(\Delta)' : \quad 0 = x(\tan\beta)' + R(\sin\alpha)' - R(\cos\alpha)'\tan\beta - R\cos\alpha(\tan\beta)'$$

La résolution du système $\{(\Delta), (\Delta)'\}$, nous donne les équations paramétriques de la caustique des rayons émergents.

Posons $a = \tan\beta$, $c = (\tan\beta)'$ et $d = R(\sin\alpha)' - R(\cos\alpha)'\tan\beta - R\cos\alpha(\tan\beta)'$. La solution du système s'exprime ainsi :

$$x = -\frac{d}{c} \quad ; \quad y = -\frac{ad}{c} + b$$

Pour calculer l'équation de la caustique dans la boule, il nous faut l'équation (Δ) de I_1I_2 :

$$(\Delta) : \quad y = x\tan\gamma + f \quad ; \quad f = R\sin i + R\cos i \tan\gamma \quad ; \quad \gamma = r - i$$

La dérivée de (Δ) par rapport à i, s'écrit :

$$(\Delta)' : \quad 0 = x(\tan\gamma)' + f' \quad ; \quad f' = R\cos i - R\sin i\tan\gamma + R\cos i(\tan\gamma)'$$

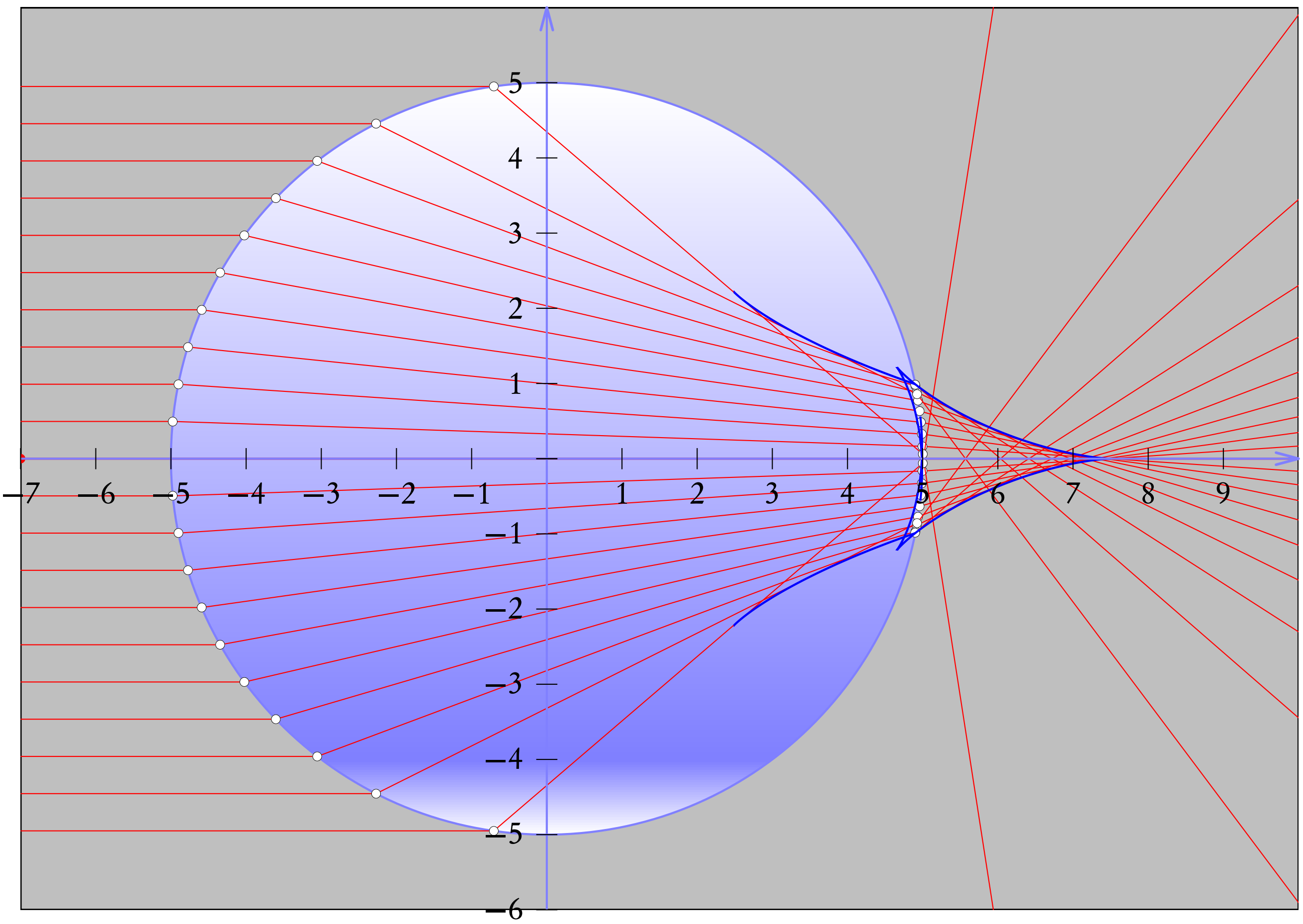
$$\gamma' = \frac{\cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} - 1 \quad ; \quad (\tan\gamma)' = \left(1 + \tan^2\gamma\right)(\gamma)'$$

La résolution du système $\{(\Delta), (\Delta)'\}$, nous fournit les équations paramétriques de la caustique des rayons dans la boule. Posons $e = \tan\gamma$, $g = (\tan\gamma)'$ et $h = f'$.

$$x = -\frac{h}{g} \quad ; \quad y = -\frac{eh}{g} + f$$

5.2 Exemple

```
\begin{pspicture*}(-7,-6)(10,6)
\psframe[fillstyle=solid,fillcolor=gray!50](-7,-6)(10,6)
\pstCaustic[rays=10,xmax=14,R=5,xmin=-7,lensType=boule,showpoints=true]
\psaxes[linecolor=blue!50]{-v}(0,0)(-7,-6)(10,6)
\end{pspicture*}
```



5.3 Une simulation avec PovRay

```
#include "colors.inc"
#include "textures.inc"
#include "glass.inc"
global_settings {
assumed_gamma 1
photons {
count 2000000
autostop 0
jitter 0
}
}
camera {
    location <3.2,10,1>
    look_at <0,0,0>
}
light_source { <0,1,-20> // Source
color 2.5*<1,1,0>
cylinder
 radius 0
 falloff 2
 tightness 0
 point_at <0,0,0>
 fade_distance 50
 fade_power 2
}
plane{ <0,1,0>, 0
   pigment { checker color Gray, color White  }
     }
cylinder {
        <0,0,0>
        <0,1,0>
        2
texture{T_Glass3}
interior { ior 1.5 }
photons {
target
reflection off
refraction on
}
}
```