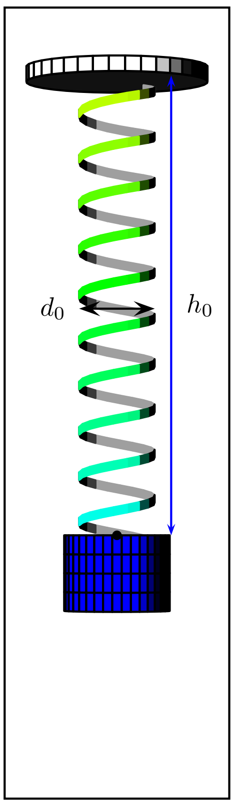
Mathematische Feinheiten einer helixförmigen Schraubenfeder ...

In Figur 1 ist eine zylindrische Schraube (Form einer Helix) mit 10 Windungen dargestellt. Ihre Gleichgewichtslage sei h_0. Der zugehörige Radius sei $r_0 = \frac{d_0}{2}$.

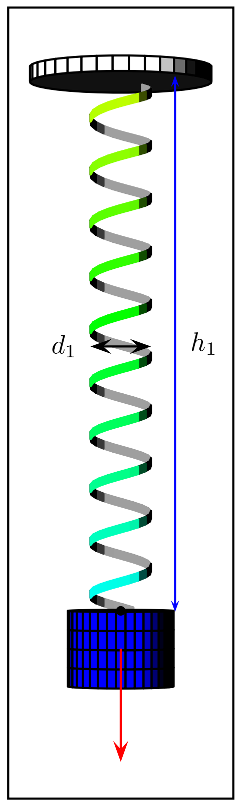
In Figur 2 ist die Feder auseinander gezogen (gestreckt) – ihre neue Höhe ist damit h_1 und der zugehörige Radius $r_1 = \frac{d_1}{2}$.

Fragen

- Wie bestimmt man die Länge der Helix?
- Da die Feder eine feste vorgegebene Länge besitzt; wie groß ist der Radius $r_1(h_0,\, r_0,\, h_1)$?



Figur 1



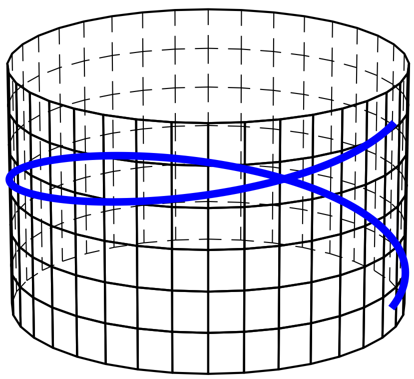
Figur 2

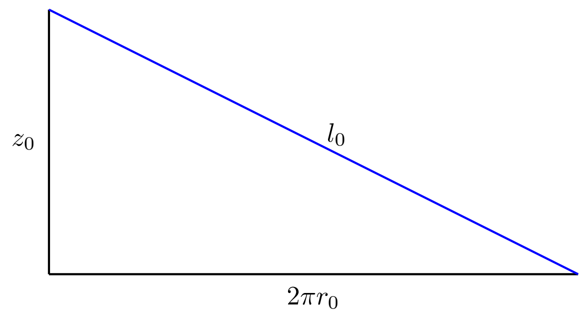
Voraussetzungen

Vereinfachend setzen wir voraus, dass alle Windungen äquidistant sind (also die Helix-Form immer beibehalten wird) und wir vernachlässigen sämtliche physikalischen Eigenschaften wie z. B. Dicke des Helix-Drahtes, Masse der Feder, Material, Temperatur, Elastizität, Torsion, usw.

Rechnung

Es ist z_0 die *Höhe* einer einzelnen Windung, somit ist $h_0 = nz_0$ die *Gesamthöhe* einer Feder mit n Windungen.





Ein kleiner Trick:

Rollt man den Zylinder auf einer Ebene ab, so wickelt sich die Helix ab zu einer Geraden in der Ebene. Bildet man ein rechtwinkliges Dreieck und benutzt den Satz von Pythagoras (die eine Kathete ist die Höhe z_0, die andere Kathete ist der Zylinderumfang $2\pi r_0$) und somit ist die Hypotenuse die Länge l_0 einer einzelnen Windung. Diese kann sehr einfach berechnet werden.

Die *Länge einer einzelnen Windung* ist

$$l_0 = \sqrt{z_0^2 + 4\pi^2 r_0^2} \tag{1}$$

Damit wird die *Gesamtlänge* der Feder

$$L_0 = nl_0$$

Nun verlängern wir die Feder (siehe Figur 2) und rechnen dasselbe noch einmal.

Es ist z_1 die *Höhe* einer einzelnen Windung, somit ist $h_1 = nz_1$ die *Gesamthöhe* der gestreckten Feder mit n Windungen.

Die *Länge einer einzelnen Windung* ist

$$l_1 = \sqrt{z_1^2 + 4\pi^2 r_1^2} \tag{2}$$

Damit wirde die *Gesamtlänge* der gestreckten Feder

$$L_1 = nl_1$$

Da es sich um ein und dieselbe Feder handelt, ist ihre Länge konstant: $L_0 = L_1$

Gleichsetzen von (1) und (2) und anschließendes Auflösen nach r_1^2, liefert:

$$r_1^2 = \frac{1}{4\pi^2 n^2} h_0^2 - \frac{1}{4\pi^2 n^2} h_1^2 + r_0^2$$

Vorgaben für die Schwingung

Zweckmäßige Wahl des Koordinatensystems: Die h-Achse weist nach unten und der Ursprung $h = 0$ wird der Einfachheit halber als oberster Punkt der Feder gewählt.

Nun führt die Feder eine harmonische Schwingung aus, mit der *Amplitude* $\hat{h} < h_0$ aus der *Gleichgewichtslage* h_0 heraus nach unten und mit der *Kreisfrequenz* $\omega = \frac{2\pi}{T}$, wobei T die *Schwingungsdauer* ist.

$$h_1(t) = h_0 + \hat{h} \cdot \sin(\omega t) = h_0[1 + \frac{\hat{h}}{h_0} \sin(\omega t)]$$

Dies liefert nach einigen einfachen arithmetischen Umformungen

$$\begin{aligned} r_1(t) &= \sqrt{\frac{1}{4\pi^2 n^2} h_0^2 \{1 - [1 + \frac{\hat{h}}{h_0} \sin(\omega t)]^2\} + r_0^2} \\ &= \sqrt{r_0^2 - \frac{\hat{h} h_0}{4\pi^2 n^2} \sin(\omega t)[2 + \frac{\hat{h}}{h_0} \sin(\omega t)]} \end{aligned}$$

Ergebnisse

Je mehr Windungen die Feder besitzt, umso weniger weicht $r_1(t)$ von r_0 ab.

Nun diskutieren wir die beiden folgenden Zeitintervalle:

- $]0; \frac{T}{2}[$ – Strecken (Verlängern) der Feder $l_1(t) > l_0$

  $$\sin(\omega t) > 0 \quad \Rightarrow \quad r_1(t) < r_0$$

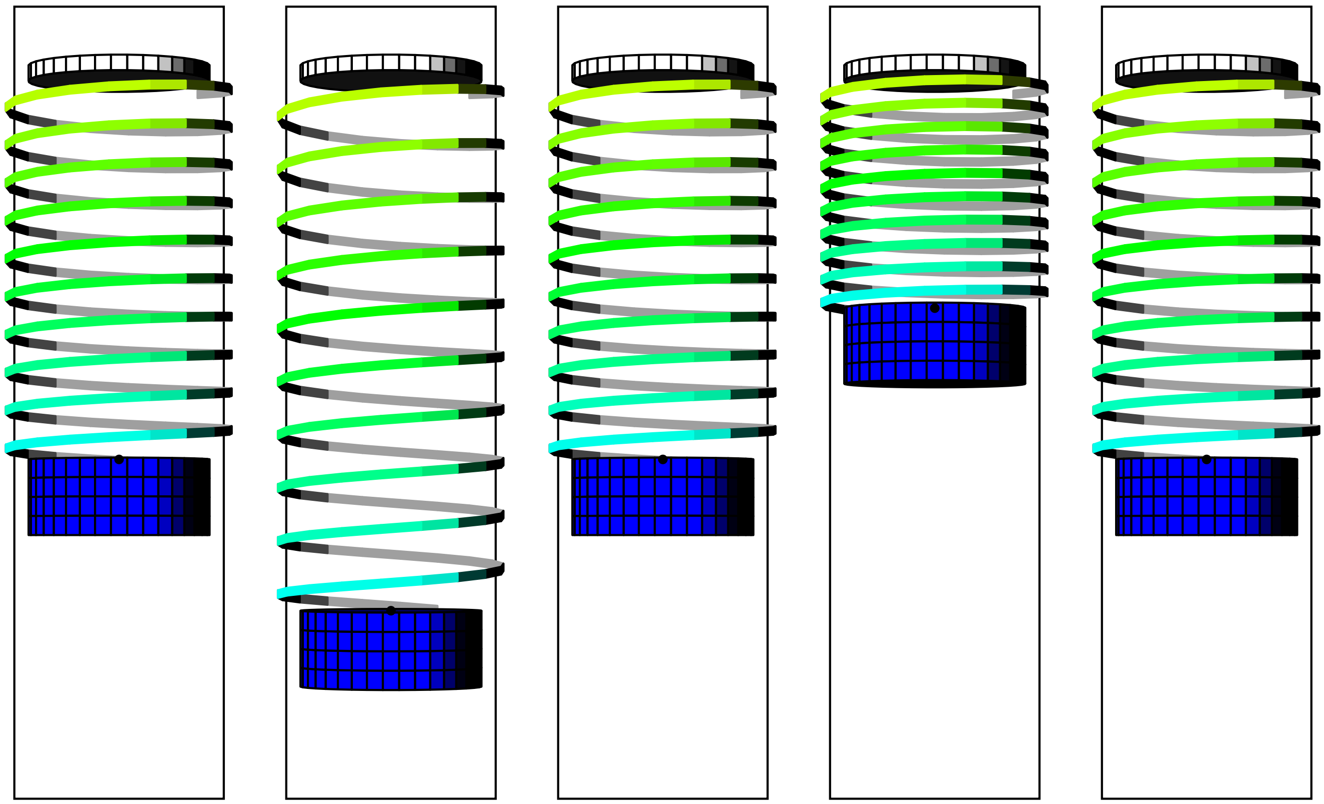
- $]\frac{T}{2}; T[$ – Stauchen (Verkürzen) der Feder $l_1(t) < l_0$

  $$\sin(\omega t) < 0 \quad \Rightarrow \quad r_1(t) > r_0$$

Wenn man nun einige explizite Rechnungen für die Variablen h_0, r_0, $\hat{h}$ durchführt, so sieht man sehr schnell, dass die *Radiuskorrektur* sehr klein ist. Eine Radiuskorrektur ist dann angebracht, wenn man die Feder sehr stark verlängert. Dies hat jedoch die Konsequenz, dass man die Feder überdehnt und den Hookeschen Bereich einer Feder verlässt – dies sind ungewollte Bedingungen für eine harmonische Schwingung. Somit macht man keinen großen Fehler, wenn man $r_1(t) \approx r_0$ wählt.

Beispiel

Hier finden Sie ein paar Ausschnitte einer harmonischen Schwingung für ($n = 10$, $h_0 = 5$, $r_0 = 1,5$, $\hat{h} = 2$) mit angewendeter *Radiuskorrektur* und man sieht nicht wirklich eine Veränderung des Radius $r_1(t)$.



$t = \frac{0}{360}T$ $t = \frac{90}{360}T$ $t = \frac{180}{360}T$ $t = \frac{270}{360}T$ $t = \frac{360}{360}T$

Eine einfache Animation dieser harmonischen Schwingung finden Sie unter:

http://melusine.eu.org/syracuse/pstricks/pst-solides3d/animations/a26/

Quellcode

```
\psset{lightsrc=30 5 5,SphericalCoor,viewpoint=50 45 0,Decran=50,resolution=180}
\multido{\i=0+90}{5}{%
\begin{pspicture}(-1.35,-5)(1.35,7)
    \pstVerb{%
      /amplitude \i\space sin 0.4 mul 1 add 5 mul def
      /radius \i\space sin 0.4 mul 1 add 2 exp neg 1 add 25 mul 4 div pi 2 exp div 100 div 1.5 2 exp add 0.5 exp def
    }
    \psframe(-1.4,-3.5)(1.4,7)
    \psSolid[object=cylindre,r=1.2,h=0.2,ngrid=1 36](0,0,6)
    \pshelices[incolor=gray!75,R=radius,h=amplitude,hue=0.2 0.5,grid,RotY=180,spires=10,dZ=0.1](0,0,6)
    \psSolid[object=cylindre,r=1.2,h=1,ngrid=4 36,fillcolor=blue](0,0,amplitude neg 5 add)
    \psPoint(0,0,amplitude neg 6 add){E1}
    \psdot(E1)
```

```
    \rput(0,-4){$t=\dfrac{\i}{360}T$}
\end{pspicture}
\qquad}
```