Méthode des rectangles pour un calcul d'aire

Issue d'un T-P fait avec des élèves de Terminale S.

Considérons la fonction f définie sur $[0;1]$ par : $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

Nous cherchons à déterminer l'aire du domaine $\mathscr{D}=\{M(x;y)/0\leqslant x\leqslant 1 \quad \text{et} \quad 0\leqslant y\leqslant f(x)\}$.

Pour celà, nous allons utiliser la méthode des rectangles.

Dans un repère orthonormal $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$, C_f est la courbe représentative de la fonction f. $\mathscr{D}$ est le domaine situé sous la courbe C_f.

On choisit de prendre l'aire du carré $OIKJ$ pour unité d'aire et on se propose de déterminer l'aire $\mathscr{A}$ de $\mathscr{D}$. Pour cela :

- on subdivise l'intervalle $[0;1]$ en n intervalles de longueur $\dfrac{1}{n}$ avec $n\in^*$;
- sur chaque intervalle $\left[\dfrac{k}{n};\dfrac{k+1}{n}\right]$ (avec $0\leqslant k\leqslant n-1$), on construit le rectangle R_k de hauteur $f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ et le rectangle R'_k de hauteur $f\left(\dfrac{k+1}{n}\right)$.

Déclarons la fonction qui va calculer la somme des aires des rectangles R_k sous la courbe C_f :

```
-->  function [s]=sommeinf(a,b,n)
-->  s=0;for k=0:n-1;s=s+f(a+k*(b-a)/n);end
-->  s=s*(b-a)/n,
```

```
-->  endfunction
```

Faisons de même avec la somme des rectangles R'_k *au-dessus* de C_f :

```
-->  function [S]=sommesup(a,b,n)
-->  S=0;for k=1:n;S=S+f(a+k*(b-a)/n);end
-->  S=S*(b-a)/n
-->  endfunction
```

Vous remarquerez que l'on a pas encore défini la fonction f et que ces deux sous-programmes sont utilisables pour d'autres fonctions que celle définie plus haut et sur un autre intervalle que $[0;1]$.

Déclarons donc notre fonction f :

```
-->  function y=f(x) ;y=1/(1+x^2);endfunction
```

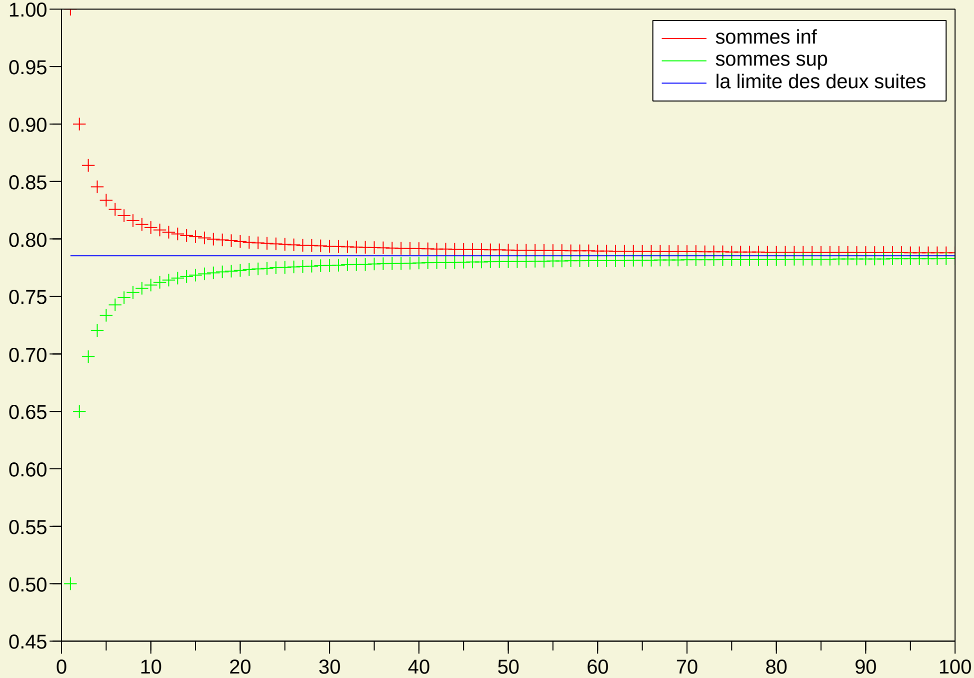
Demandons les approximations pour $n = 100$, n étant le nombre de subdivisions de l'intervalle $[0;1]$

```
-->  sommeinf(0,1,100)
 ans  =
0.787894
-->  sommesup(0,1,100)
 ans  =
0.782894
```

Demandons maintenant de calculer les approximations pour n variant de 1 à 100 et traçons ce que nous obtenons :

```
-->  for i=1:100;s(i)=sommeinf(0,1,i);S(i)=sommesup(0,1,i);end
-->  z=%pi/4;
-->  x=1:100;
```

```
-->  legends(['sommes inf';'sommes sup';'la limite des deux suites'],[5,3,2],'ur')
-->  plot(x,s,"r+",x,S,"g+"),plot(x,z)
```



Valeur des sommes *sup* et *inf* en fonction du nombre de subdivisions de $[0,1]$

On observe que les deux suites ainsi définies semblent être adjacentes.

Elles convergent vers un réel l que l'on admettra être égal à $\dfrac{\pi}{4}$, en effet vous verrez après la terminale que $\int_0^1 f(x)dx = \frac{\pi}{4}$,ce qui est une autre affaire...