1 Vocabulaire

- *Développer* une expression, c'est transformer tous les produits de cette expression en sommes.

  Propriété 1 *Si k, a, b, c, d sont 5 nombres quelconques alors*

  $$k \times (a+b) = k \times a + k \times b \qquad (a+b) \times (c+d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$$

  Exemples d'application

  $$\begin{array}{llll}
A = 2(x+3) & B = x(x-1) & C = 3(2x+5) & D = (x+2)(3x-1) \\
A = 2 \times x + 2 \times 3 & B = x \times x + x \times (-1) & C = 3 \times 2x + 3 \times 5 & D = x \times 3x + x \times (-1) + 2 \times 3x + 2 \times (-1) \\
A = 2x+6 & B = x^2 + (-x) & C = 6x+15 & D = 3 \times \underline{x \times x} - 1x + 6x - 2 \\
 & B = x^2 - x & & D = 3x^2 \underline{-1x+6x} + 2 \\
 & & & D = 3x^2 + 5x + 2
\end{array}$$

  Remarque L'expression D a été développée puis *réduite*. Cela signifie que l'on a écrit cette expression sous la forme finale la plus simple possible.

- *Factoriser* une expression, c'est transformer toutes les sommes en produits.

Propriété 2 *Si k, a, b, c, d sont 5 nombres quelconques alors*

$$k \times a + k \times b = k \times (a+b) \qquad a \times c + a \times d + b \times c + b \times d = (a+b) \times (c+d)$$

Exemples d'application

$$\begin{aligned}
A &= \underline{(x+3)}(2x-3) + \underline{(x+3)}(2-x) \\
A &= (x+3) \times [(2x-3) + (2-x)] \\
A &= (x+3)(2x-3+2-x) \\
A &= (x+3)(x-1)
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
B &= (1-x)(1+x) - (1+x)^2 \\
B &= (1-x)\underline{(1+x)} - \underline{(1+x)} \times (1+x) \\
B &= (1+x)[(1-x) - (1+x)] \\
B &= (1+x)(1-x-1-x) \\
B &= (1+x) \times (-2x) \\
B &= -2x(1+x)
\end{aligned}$$

2 Egalités remarquables

Egalités remarquables

Si a et b sont deux termes quelconques alors

Carré d'une somme de deux termes

$$(a+b)^2 = \underbrace{a^2}_{\text{carré du } 1^{\text{er}}\text{terme}} + \underbrace{2 \times a \times b}_{\text{double produit}} + \underbrace{b^2}_{\text{carré du } 2^{\text{e}}\text{terme}}$$

Carré d'une différence de deux termes

$$(a-b)^2 = \underbrace{a^2}_{\text{carré du } 1^{\text{er}}\text{terme}} - \underbrace{2 \times a \times b}_{\text{double produit}} + \underbrace{b^2}_{\text{carré du } 2^{\text{e}}\text{terme}}$$

Produit de la somme de deux termes par leur différence

$$(a+b)(a-b) = \underbrace{a^2}_{\text{carré du } 1^{\text{er}}\text{terme}} - \underbrace{b^2}_{\text{carré du } 2^{\text{e}}\text{terme}}$$

Remarque On dit *remarquables* car il faut les *remarquer* dans une expression littérale.

Application n°1 : Développement

$$\begin{array}{lll}
A = (x+1)^2 & B = (2x-3)^2 & C = (4-x)(4+x) \\
A = x^2 + 2 \times x \times 1 + 1^2 & B = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 3^2 & C = 4^2 - x^2 \\
A = x^2 + 2x + 1 & B = 4x^2 - 12x + 9 & C = 16 - x^2
\end{array}$$

Application n°2 : Factorisation

$$\begin{array}{lll}
D = x^2 - 6x + 9 & E = 9x^2 - 25 & F = 4x^2 + 16x + 16 \\
D = x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2 & E = (3x)^2 - 5^2 & F = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 4 + 4^2 \\
D = (x-3)^2 & E = (3x-5)(3x+5) & F = (2x+4)^2
\end{array}$$

Remarque En pratique, pour la factorisation, c'est la 3$^{\text{e}}$ égalité remarquable qui sert le plus souvent.

$$a^2 - b^2 = (a+b) \times (a-b)$$

Application n°3 : Calcul mental

$$\begin{array}{lll}
102^2 = (100+2)^2 & 49^2 = (50-1)^2 & 37 \times 43 = (40-3) \times (40+3) \\
102^2 = 100^2 + 2 \times 100 \times 2 + 2^2 & 49^2 = 50^2 - 2 \times 50 \times 1 + 1^2 & 37 \times 43 = 40^2 - 3^3 \\
102^2 = 10\,204 & 49^2 = 2\,401 & 37 \times 43 = 1\,591
\end{array}$$

Remarque A n'utiliser que pour le calcul mental. Une expression du type $(5-7)^2$ se calcule avec les règles de priorités de calculs habituelles : $(5-7)^2 = (-2)^2 = 4$.

3 Exercices d'application

Exercice 1 Soit les expressions

$$C = (x+2)(2x-3) + (x+2)^2 \qquad D = (2x+3)^2 - (3x-1)^2$$

1/ Développer et réduire les expressions C et D.

$$\begin{array}{ll}
C = (x+2)(2x-3) + (x+2)^2 & D = (2x+3)^2 - (3x-1)^2 \\
C = 2x^2 - 3x + 4x - 6 + x^2 + 2x \times 2 + 2^2 & D = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 1 + 3^2 - \left((3x)^2 - 2 \times 3x \times 1 + 1^2\right) \\
C = 2x^2 + 1x - 6 + x^2 + 4x + 4 & D = 4x^2 + 4x + 9 - \left(9x^2 - 6x + 1\right) \\
C = 3x^2 + 5x - 2 & D = 4x^2 + 4x + 9 - 9x^2 + 6x - 1 \\
 & D = -5x^2 + 10x + 8
\end{array}$$

2/ Calculer la valeur de C lorsque $x = -1$.

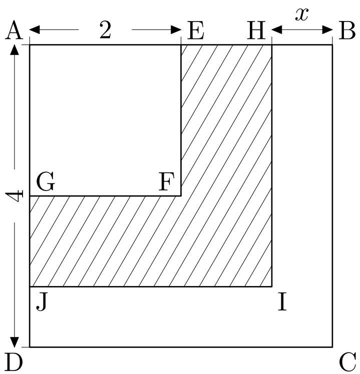
$$C = (-1+2) \times (2 \times (-1) - 3) + (-1+2)^2$$
$$C = 1 \times (-2-3) + (1)^2$$
$$C = 1 \times (-5) + 1$$
$$C = -5 + 1$$
$$C = -4$$

3/ Factoriser les expressions C et D.

$$C = (x+2)(2x-3) + (x+2)^2$$
$$C = (x+2)(2x-3) + (x+2)(x+2)$$
$$C = (x+2) \times [(2x-3) + (x+2)]$$
$$C = (x+2) \times (2x-3+x+2)$$
$$C = (x+2) \times (3x-1)$$

$$D = (2x+3)^2 - (3x-1)^2$$
$$D = ((2x+3) + (3x-1)) \times ((2x+3) - (3x+1))$$
$$D = (2x+3+3x-1) \times (2x+3-3x-1)$$
$$D = (5x+2) \times (-x+2)$$

Exercice 2



Dans la figure ci-contre $AEFG$, $AHIJ$ et $ABCD$ sont des carrés.

1/ Exprime en fonction de x la longueur AH.
Déduis-en l'aire de $AHIJ$.

2/ Exprime en fonction de x l'aire $\mathscr{A}$ de la surface hachurée. On développera le résultat.

3/ Factorise l'expression $\mathscr{A}$.

4/ Calcule l'aire de la surface hachurée pour $x = 2$. Pouvait-on s'attendre à ce résultat ?

1/ Comme H appartient au segment $[AB]$, on a

$$AH = AB - HB$$
$$AH = 4 - x$$

On obtient alors

$$\mathscr{A}_{AHIJ} = AH^2$$
$$\mathscr{A}_{AHIJ} = (4-x)^2$$

2/

$$\mathscr{A} = \mathscr{A}_{AHIJ} - \mathscr{A}_{AEFG}$$
$$\mathscr{A} = (4-x)^2 - AE^2$$
$$\mathscr{A} = (4-x)^2 - 2^2$$
$$\mathscr{A} = (4-x)^2 - 4$$
$$\mathscr{A} = 4^2 - 2 \times 4 \times x + x^2 - 4$$
$$\mathscr{A} = 16 - 8x + x^2 - 4$$
$$\mathscr{A} = x^2 - 8x + 12$$

3/

$$\mathscr{A} = (4-x)^2 - 4$$
$$\mathscr{A} = (4-x)^2 - 2^2$$
$$\mathscr{A} = \big((4-x)-2\big) \times \big((4-x)+2\big)$$
$$\mathscr{A} = (4-x-2) \times (4-x+2)$$
$$\mathscr{A} = (2-x)(6-x)$$

4/ Pour $x = 2$, on obtient

$$\mathscr{A} = (2-x)(6-x)$$
$$\mathscr{A} = (2-2)(6-2)$$
$$\mathscr{A} = 0 \times 4$$
$$\mathscr{A} = 0$$

On pouvait s'attendre au résultat car si $x = 2$ alors les points H et E sont confondus et la surface hachurée n'existe pas.