

1 Fonctions linéaires

1.1 Vocabulaire

Définition 1 Soit a un nombre quelconque « fixe ».

Une fonction **linéaire** associe à un nombre x quelconque le nombre $a \times x$. a s'appelle le coefficient de la fonction linéaire.

On note le plus souvent une fonction par une lettre, f par exemple. On écrit alors $f(x) = ax$ et on lit f de x égal a fois x . $f(x)$ s'appelle l'image de x par la fonction f .

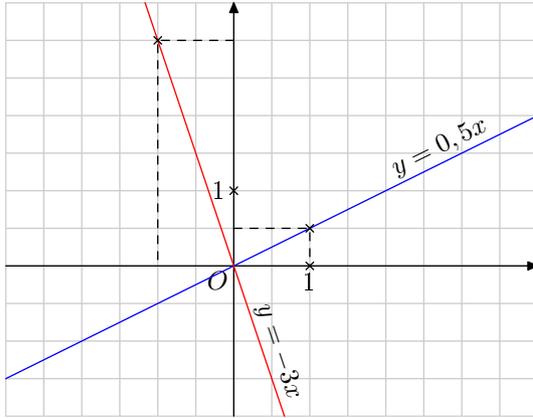
On peut également noter la fonction sous la forme

$$f : x \mapsto ax$$

1.2 Représentation graphique

Propriété 1 Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine du repère. On dira alors que $y = ax$ est une équation de la droite et que a est le coefficient directeur de la droite.

Exemples



Représenter graphiquement les fonctions $f : x \mapsto 0,5x$ et g définie par $g(x) = -3x$.

f est une fonction linéaire donc sa représentation graphique passe par l'origine du repère.

Je choisis $x = 1$, son image est $f(1) = 0,5 \times 1 = 0,5$. Je place le point de coordonnées $(1; 0,5)$.

g est une fonction linéaire donc sa représentation graphique passe par l'origine du repère.

Je choisis $x = -1$, son image est $g(-1) = -3 \times (-1) = 3$. Je place le point de coordonnées $(-1; 3)$.

2 Fonctions affines

2.1 Vocabulaire

Définition 2 Soit a et b deux nombres quelconques « fixes ».

Une fonction **affine** associe à un nombre x quelconque le nombre $a \times x + b$.

On note le plus souvent une fonction par une lettre, f par exemple. On écrit alors $f(x) = ax + b$ et on lit f de x égal a fois x plus b . $f(x)$ s'appelle l'image de x par la fonction f . On peut également noter la fonction sous la forme

$$f : x \mapsto ax + b$$

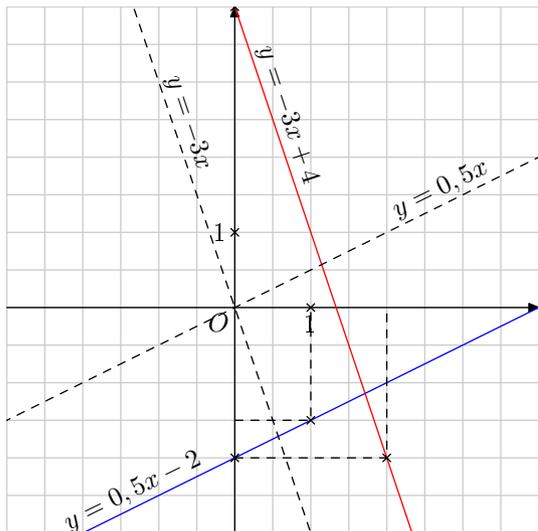
Remarque : une fonction linéaire est un cas particulier d'une fonction affine avec $b = 0$.

2.2 Représentation graphique

Propriété 2 Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction affine est une droite passant par le point de coordonnées $(0; b)$ et parallèle à la représentation graphique de la fonction linéaire associée $g : x \mapsto ax$. On dira alors que $y = ax + b$ est une équation de la droite.

a s'appelle le coefficient directeur de la droite et b s'appelle l'ordonnée à l'origine.

Exemples



Représenter graphiquement les fonctions $f : x \mapsto 0,5x - 2$ et g définie par $g(x) = -3x + 4$.

f est une fonction affine donc sa représentation graphique passe par le point de coordonnées $(0; -2)$.

Je choisis $x = 1$, son image est $f(1) = 0,5 \times 1 - 2 = -1,5$. Je place le point de coordonnées $(1; -1,5)$.

g est une fonction affine donc sa représentation graphique passe par le point de coordonnées $(0; 4)$.

Je choisis $x = 2$, son image est $g(2) = -3 \times (2) + 4 = -2$. Je place le point de coordonnées $(2; -2)$.

3 Applications des fonctions linéaires

Une fonction linéaire représente une situation de proportionnalité. Elle s'applique donc aux « pourcentages ».

Propriété 3 – Prendre $t\%$ d'un nombre x , c'est multiplier ce nombre x par $\frac{t}{100}$.

– Augmenter un nombre x de $t\%$, c'est multiplier ce nombre x par $1 + \frac{t}{100}$.

– Réduire un nombre x de $t\%$, c'est multiplier ce nombre x par $1 - \frac{t}{100}$.

4 Exercice

Un opérateur téléphonique propose à ses clients trois formules de facturation mensuelle des communications.

Formule 1 : 0,12€ la minute.

Formule 2 : un abonnement fixe de 4,8€ et 0,04€ par minute.

Formule 3 : un forfait de 10€ pour 3 h de communications.

1/ Calcule le montant des factures des communications selon les trois formules pour des durées de 35 min, de 1 h 20 min et 2 h 45 min.

On remarque que 1 h 20 min = 80 min et 2 h 45 min = 165 min. On obtient le tableau suivant :

	35 min	1 h 20 min	2 h 45 min
Formule 1	$0,12 \times 35 = 4,2$	$0,12 \times 80 = 9,6$	$0,12 \times 165 = 19,8$
Formule 2	$0,04 \times 35 = 1,4$	$0,04 \times 80 = 3,2$	$0,04 \times 165 = 6,6$
	$1,4 + 4,8 = 6,2$	$3,2 + 4,8 = 8$	$6,6 + 4,8 = 11,2$
Formule 3	10	10	10

2/ Cette question a pour but de rechercher la formule la plus avantageuse selon la durée des communications téléphoniques comprises entre 0 et 3 heures.

(a) Soit x la durée, en minutes, des communications.

Exprime, en fonction de x , le coût des communications selon les différentes formules ; on appellera $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ les prix obtenus en appliquant respectivement la formules 1, la formule 2 et la formule 3.

On a donc :

- $f_1(x) = 0,12 \times x$.
- $f_2(x) = 0,04 \times x + 4,8$ (il ne faut pas oublier l'abonnement.)
- $f_3(x) = 10$ (on paie toujours la même chose quelque soit la durée de communications.)

(b) Sur une feuille de papier millimétré, on considère un repère orthogonal. L'origine est placée en bas à gauche de la feuille. Sur l'axe horizontal, 1 cm représente 20 min ; sur l'axe vertical, 1 cm représente 20€.

Trace les représentations graphiques de f_1 , f_2 et f_3 en se limitant au cas où $0 \leq x \leq 180$.

Voir figure 1.

(c) Utilise le graphique pour répondre aux questions suivantes :

- Quelle est la formule la plus avantageuse pour 1 h30 min ? Regardons les points des 3 droites d'abscisse 90 min : c'est la formule 2 qui est la plus avantageuse.
- Pour quelle durée de communications les formules 1 et 2 ont-elles le même coût ? On regarde l'abscisse du point d'intersection des droites représentant f_1 et f_2 : 60 min.
- Pour quelles durées de communication la formule 3 est-elle la plus avantageuse ? On regarde à partir de quelle durée la droite représentant f_3 est « en dessous » des deux autres droites : à partir de 130 min.

Remarque : Les résultats de la question 2c peuvent être retrouvés par le calculs.

- pour la question 2(c)i, en comparant $f_1(90)$, $f_2(90)$, $f_3(90)$;
- pour la question 2(c)ii, en résolvant l'équation $f_1(x) = f_2(x)$;
- pour la question 2(c)iii, en résolvant les inéquations $f_3(x) \leq f_1(x)$ et $f_3(x) \leq f_2(x)$.

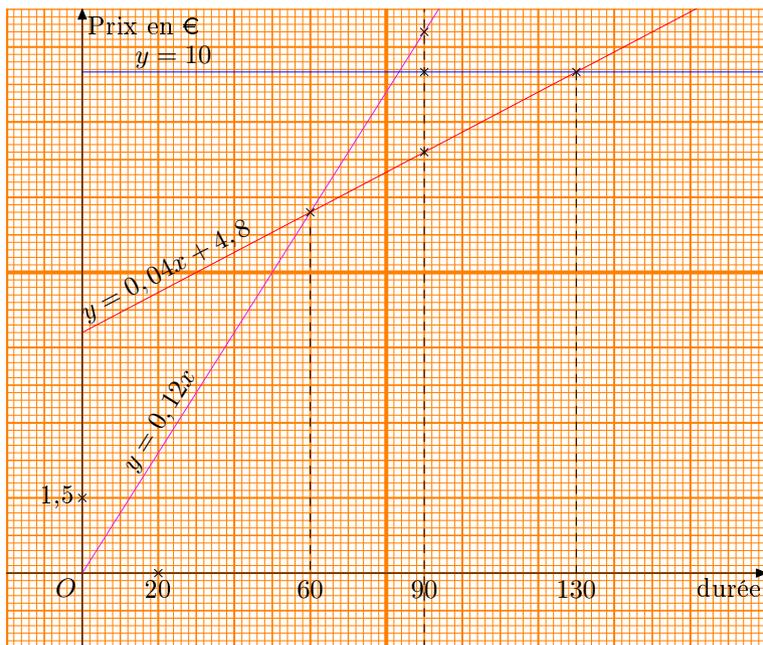


FIG. 1 – Représentation graphique des 3 fonctions f , g et h .