Images dans un miroir sphérique

Manuel Luque*

6 août 2002

1 Objectifs

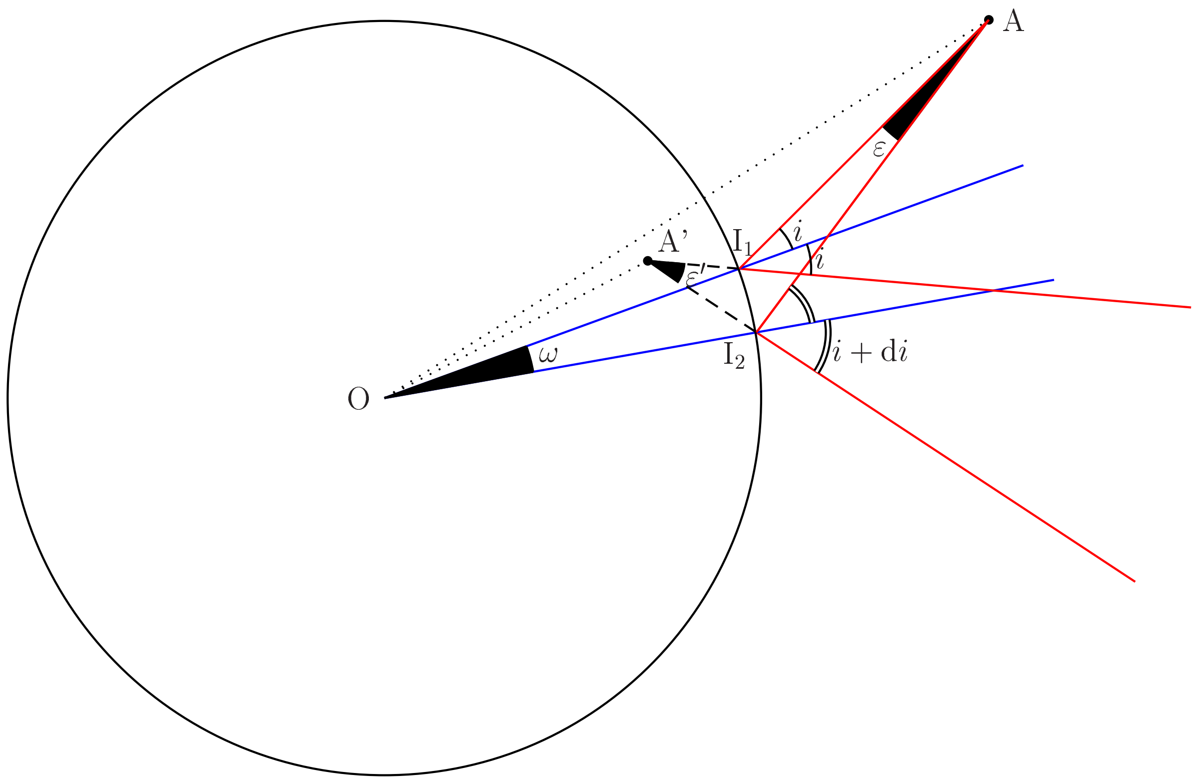
On voit souvent dans les villes, lorsque la visibilité à la sortie d'un garage ou à un carrefour est insuffisante, ou bien dans certains magasins pour des motifs de surveillance, des miroirs bombés donnant de l'environnement un panorama très large. On peut prendre aussi une boule argentée ou dorée que l'on suspend aux branches des sapins de Noël, pour voir le décor se réfléchir dans la boule avec une distorsion bien particulière.

L'objectif est de définir des éléments de décor en 3D, *des briques*, pour reconstruire ce qu'un observateur placé à une certaine distance d'une boule miroir, à la même hauteur que son centre verrait.

Les *briques* à notre disposition sont :

- Un parallélépipède rectangle donné par ses trois dimensions `A,B,C` : il peut donc se transformer en cube et même en dé.
- Un quadrillage plan défini par son origine, la normale au plan et ses limites.
- Une ligne.
- Un rectangle défini comme le quadrillage.
- Un cercle défini par la normale à son plan, son origine et son rayon, un arc de cercle défini comme le cercle avec ses deux angles limites.
- Un point de l'espace.
- Un tétraèdre donné par les coordonnées du centre de sa base et le rayon du cercle inscrivant chaque face, que l'on peut faire tourner.
- Une pyramide à base carrée donnée par le demi-côté de sa base et sa hauteur que l'on peut faire tourner et placer où on veut.
- Une sphère donnée par les coordonnées du centre `CX=...,CY=...,CZ=...` et le rayon, que l'on peut faire tourner avec les paramètres `RotX=...,RotY=...,RotZ=...`.
- Un cylindre vertical défini par son rayon, sa hauteur, que l'on peut faire tourner avec les paramètres `RotX=...,RotY=...,RotZ=...` et dont le centre de la base se placera avec les paramètres `CX=...,CY=...,CZ=...`

* <Mluque5130@aol.com>



- Un cône et tronc de cône définis par le rayon de la base, la hauteur et la fraction de hauteur qu'on souhaite retenir (pour le tronc ce cône). On peut les placer ou l'on veut et les faire tourner comme les autres éléments.

2 Présentation du problème théorique

Il s'agit d'étudier la réflexion d'un mince pinceau conique émis par A se réfléchissant sur le miroir sphérique et qui pénétrera dans l'œil de l'observateur. C'est un problème très complexe qui a été abordé dans sa généralité par Henri Bouasse dans son livre : *Optique supérieure*, paru en 1917 aux éditions Delagrave.

Le point lumineux A, quel qu'il soit, est dans le plan du grand cercle de la sphère défini par $\mathrm{OI_1A}$. Je donne le début de cette étude théorique, sans la développer jusqu'à son terme, car comme l'indique Henri Bouasse lui-même « *Le problème est généralement inextricable, sauf dans le cas où la symétrie du système indique quels rayons il faut regrouper après réflexion* ». Et bien que la fin de cette remarque s'applique au miroir sphérique, encore faudrait-il que les calculs soient facilement programmables et relativement rapides et j'avoue avoir été découragé par leur complexité. Heureusement, nous verrons que dans certaines conditions, de judicieuses approximations permettent d'obtenir une solution réaliste.

Afin d'apprécier la difficulté du problème, on considère d'abord les limites du pinceau dans ce plan, c'est à dire sur l'arc $\widehat{\mathrm{I_1I_2}}$.

Les angles ont exagérément grands pour des raisons de clarté.

Dans le triangle OI_1A,

$$i = I_1\widehat{OA} + \widehat{OAI_1}$$

Dans le triangle OI_2A,

$$\begin{aligned} i + \mathrm{d}i &= I_2\widehat{OA} + \widehat{OAI_2} \\ &= I_2\widehat{OI_1} + I_1\widehat{OA} + \widehat{OAI_1} + I_1\widehat{AI_2} \\ &= \omega + I_1\widehat{OA} + \widehat{OAI_1} + \varepsilon \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\mathrm{d}i = \omega + \varepsilon \tag{1}$$

Dans le triangle OI_1A'

$$i = \pi - (I_1\widehat{OA'} + \widehat{OA'}I_1)$$

Dans le triangle OI_2A'

$$\begin{aligned} i + \mathrm{d}i &= \pi - (I_2\widehat{OA'} + \widehat{OA'}I_2) \\ &= \pi - \Big((I_2\widehat{OI_1} + I_1\widehat{OA'}) + (\widehat{OAI'_1} - I_1\widehat{A'}I_2)\Big) \\ &= \pi - \Big((\omega + I_1\widehat{OA'}) + (\widehat{OA'}I_1 - \varepsilon')\Big) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\mathrm{d}i = -\omega + \varepsilon' \tag{2}$$

En rapprochant (1) et (2) :

$$\omega + \varepsilon = -\omega + \varepsilon' \Longleftrightarrow 2\omega = \varepsilon' - \varepsilon \tag{3}$$

En se rappelant qu'en réalité ε, ε' et ω sont de petits angles, on établit les relations suivantes, en posant :

$$t = AI_1 \text{ et } t' = A'I_1$$

$$\mathrm{d}s = \widehat{I_1I_2} = R\omega = \frac{t\varepsilon}{\cos i} = \frac{t'\varepsilon'}{\cos i}$$

$$\varepsilon = \frac{R\omega\cos i}{t} \qquad \varepsilon' = \frac{R\omega\cos i}{t'}$$

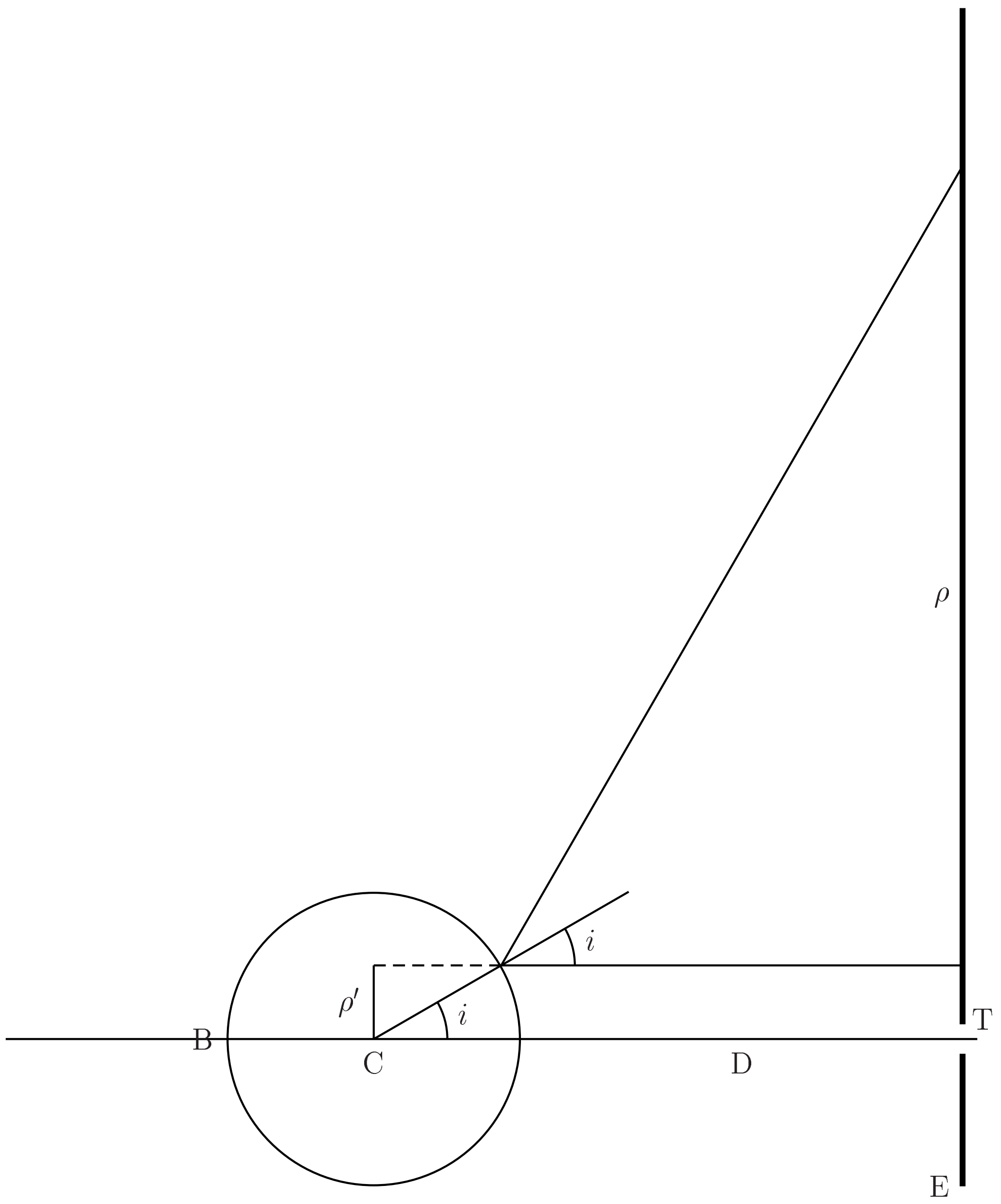
Compte-tenu de la relation (3), on en déduit la formule fondamentale :

$$\frac{1}{t'} - \frac{1}{t} = \frac{2}{R\cos i}$$

S'il n'y avait que le faisceau de rayons balayant depuis A l'arc $\widehat{I_1I_2}$, l'image virtuelle que verrait l'œil serait A', qui est dans ce plan la trace de la *focale tangentielle.*

Il faut maintenant envisager toutes les autres génératrices du cône. On en prend deux de particulières, celles qui sont sur les bouts de l'arc de cercle de la sphère perpendiculaire au grand cercle précédent. Nous ne pouvons plus nous placer maintenant dans un plan pour faire le schéma. Ces deux génératrices permettent de déterminer la *focale radiale* A''. Les deux focales A' et A'' sont alignées avec le rayon réfléchi correspondant au rayon moyen du pinceau incident.

En conclusion, à la page 134, Henri Bouasse écrit : « *l'œil n'utilise qu'un pinceau extrêmement étroit ; il s'accommode sur l'une des focales ou sur le cercle de diffusion.* ». Nous avons un peu avancé, mais quel(s) point(s) calculer?



Les milieux des focales tangentielles, radiales et du cercle de diffusion se trouvent alignés avec l'œil et le point d'incidence du rayon moyen du faisceau (celui qui après réflexion passe par l'œil). L'image obtenue d'un objet quelconque n'est pas plane. On pourrait contourner la difficulté en imaginant un plan fictif perpendiculaire à l'axe œil-centre de la boule et passant par une valeur moyenne des cercles de diffusion, sur lequel on calculerait les intersections des rayons. Il faut bien reconnaître que tout cela est passablement compliqué.

Henri Bouasse propose, dans certaines conditions, une méthode approximative qui donne de bons résultats et qui a l'avantage de la simplicité. C'est l'intégralité de cette solution qu'il donne dans les pages 133, 134 et 135 de son livre, qui est développée ci-après.

3 Vision dans une boule de jardin

1° — Pour effectuer les expériences suivantes, on se sert d'une boule de jardin achetée dans un bazar, ou d'un petit ballon de verre de 5 cm de diamètre environ dont on argente la surface extérieure. On peut argenter extérieurement une bille d'ivoire.

Sur une très grande feuille de carton blanc E, on trace un quadrillage en traits noirs épais. On regarde l'image de ce quadrillage par un petit trou percé au centre du carton.

La distance D = TB sera prise d'une trentaine de centimètres.

Le quadrillage apparaît déformé *en barillet*, mais *parfaitement net*.

2° — Pour avoir une idée de la loi de déformation supposons l'œil assez loin pour que les rayons réfléchis qui y parviennent, soient quasi-parallèles. Appelons ρ' la distance d'un rayon à la droite TB.

Soit R le rayon de la boule. l'angle d'incidence est :

$$i = \arcsin(\rho' : \mathrm{R})$$

Le point où le rayon conjugué coupe l'écran E, est à une distance ρ de TB donnée par la formule :

$$\rho = \mathrm{D} \tan 2i$$

D'où la loi approchée :

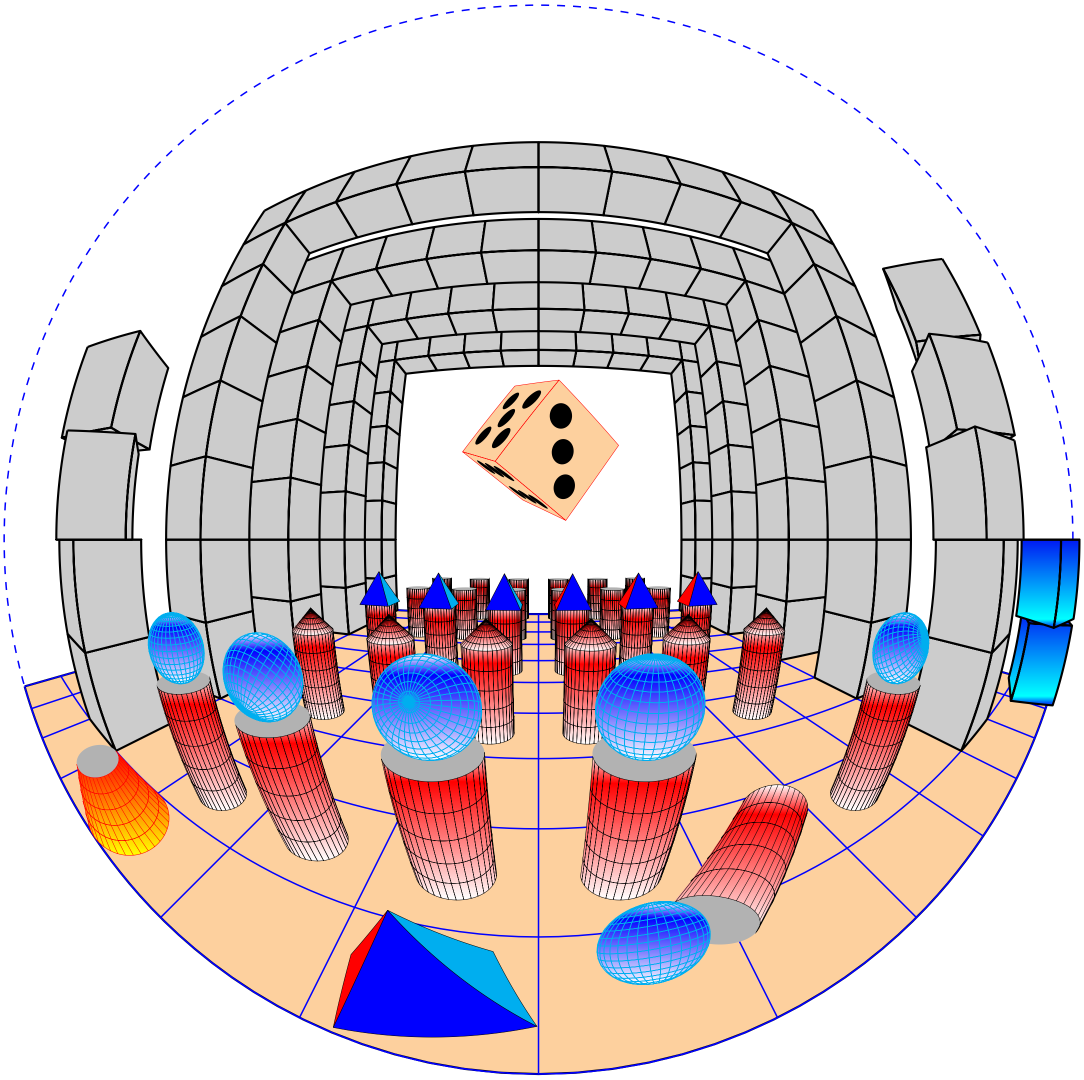
$$\arctan \frac{\rho}{\mathrm{D}} = 2 \arcsin \frac{\rho'}{\mathrm{R}}$$

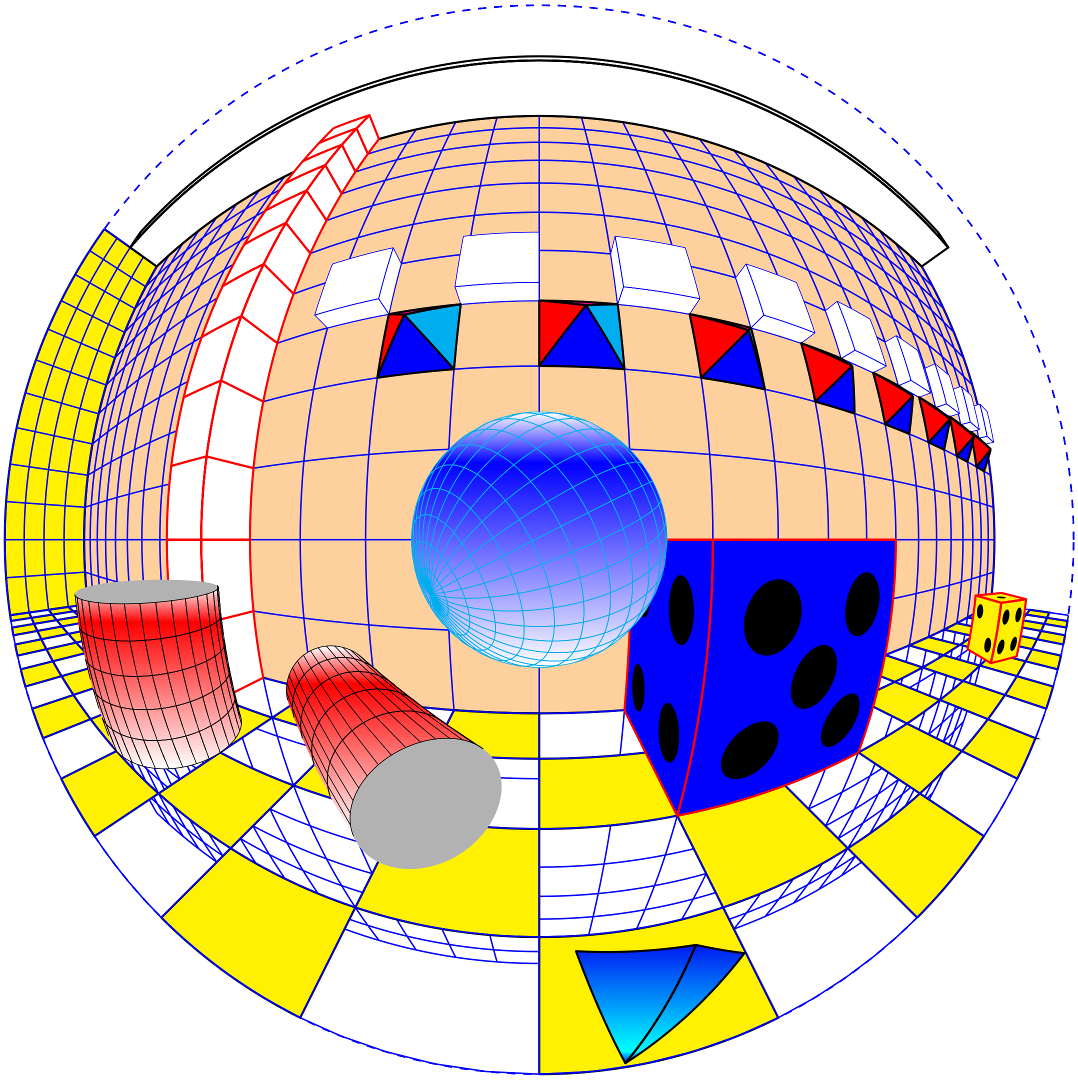
ρ devient infini pour :

$$\arcsin(\rho' : \mathrm{R}) = 45^{\circ} \qquad \rho' = 0.7\mathrm{R}$$

En conséquence, si grand que soit le carton, son image occupera moins des sept dixièmes du diamètre.

4 Exemples

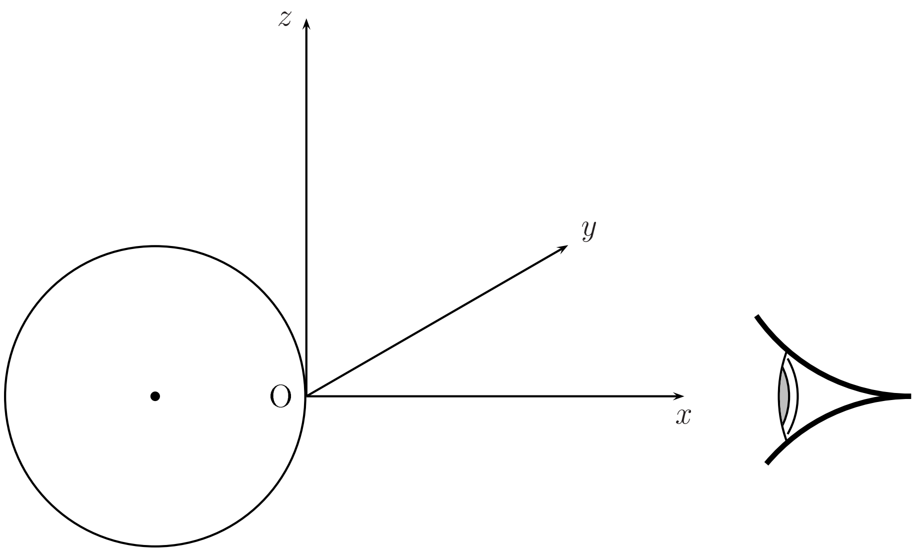




5 Utilisation des briques

5.1 Le repère

l'origine est placée contre la boule, sur l'horizontale joignant le centre C de la boule à l'œil de l'observateur. Oz est vertical, Oxy forme le plan horizontal. Tous les objets seront donc placé au-delà de O avec $x > 0$.



5.2 Placer un quadrillage

Le plan du quadrillage est défini par une origine (Xorigine,Yorigine,Zorigine), le vecteur unitaire normal au plan donné par sa longitude et sa latitude (θ, ϕ) lesquelles sont paramétrées, avec des valeurs en degrés avec :

- normaleLongitude =
- normaleLatitude =

Un vecteur unitaire quelconque a pour coordonnées, en fonction de θ et ϕ :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \sin\theta\cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont les vecteurs unitaires dirigés respectivement suivant ox, Oy et Oz.

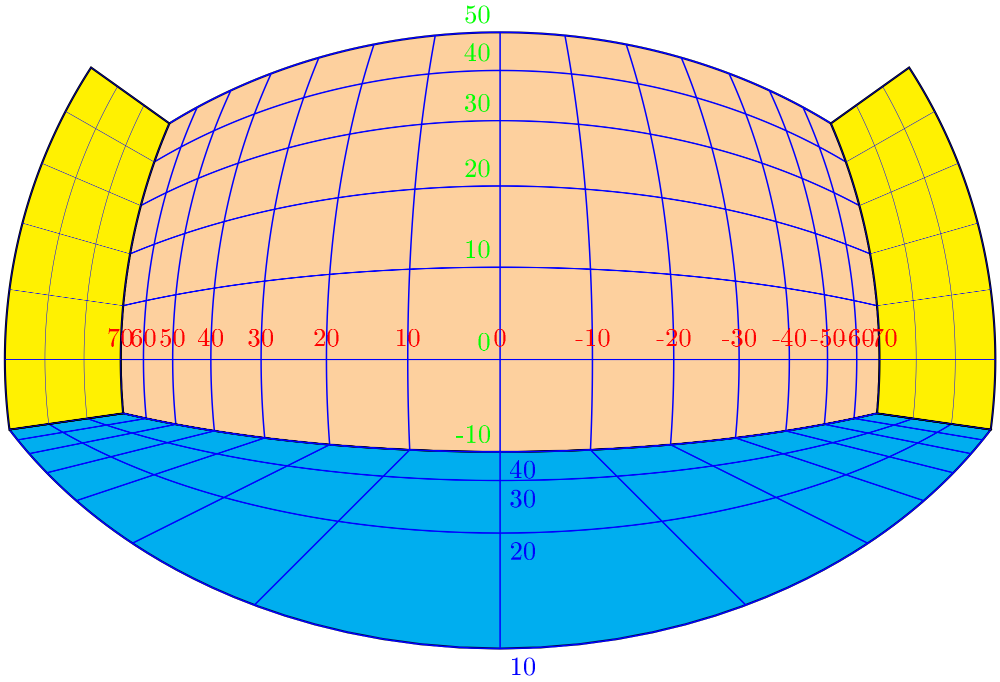
Le vecteur unitaire normal à un plan de front, c'est-à-dire parallèle à Oyz, est le vecteur $\vec{i}$ ou $-\vec{i}$, $\vec{u}(\theta = 0 \text{ ou } \pi, \phi = 0)$.

Un plan horizontal est parallèle à Oxy, un vecteur normal est soit $\vec{k}$, soit $-\vec{k}$, il est défini par $\vec{u}(\theta = \text{valeur indifférente}(0), \phi = \pi/2 \text{ ou } -\pi/2)$.

Un plan vertical parallèle à Oxz a pour normale $\vec{j}$ ou $-\vec{j}$, donc $\theta = \pi/2$ ou $-\pi/2$ et $\phi = 0$.

Une remarque importante : le vecteur unitaire choisi normal au plan $\vec{u}$, détermine l'orientation des vecteurs $\vec{I}$ et $\vec{J}$ du plan, avec les règles habituelles d'orientation : le trièdre $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{u})$ est direct, **mais le vecteur $\vec{I}$ a été pris dans le plan de référence Oxy.**

Pour que le quadrillage soit parfaitement déterminé, on fixe les valeurs de deux sommets opposé avec : Ymin=-50,Ymax=10,Xmax=70,Xmin=-70. Ainsi que le pas de la grille avec grille=10, par exemple.



En bleu graduations de l'axe Ox, en rouge celui de Ox et en vert celui de Oz.

Le quadrillage du plan de front est défini par :

```
\BouleQuadrillage[normaleLongitude=0,%
                normaleLatitude=0,%
                Xorigine=40,Yorigine=0,Zorigine=0,%
                linecolor=blue,linewidth=0.2mm,grille=10,%
                Ymin=-50,Ymax=10,Xmax=70,Xmin=-70]%
```

Le quadrillage du plan horizontal par :

```
\BouleQuadrillage[normaleLongitude=0,%
                normaleLatitude=90,%
                Xorigine=40,Yorigine=0,Zorigine=-10,%
                linecolor=blue,linewidth=0.2mm,grille=10,%
                Ymin=-30,Ymax=0,Xmax=70,Xmin=-70]%
```

Les quadrillages des plans latéraux par :

```
\BouleQuadrillage[normaleLongitude=90,%
                normaleLatitude=0,%
                Xorigine=40,Yorigine=70,Zorigine=-10,%
                linecolor=blue,linewidth=0.05mm,grille=10,%
                Ymin=-60,Ymax=0,Xmin=-30,Xmax=0]%
\BouleQuadrillage[normaleLongitude=90,%
                normaleLatitude=0,%
                Xorigine=40,Yorigine=-70,Zorigine=-10,%
                linecolor=blue,linewidth=0.05mm,grille=10,%
                Ymin=-60,Ymax=0,Xmin=-30,Xmax=0]%
```

On peut se rendre de ce qui se produit en changeant l'orientation du vecteur normal. J'inverse l'orientation de la normale pour les quatre plans.

On obtient la même chose que précédemment en faisant :

```
\begin{pspicture}(-5,-4)(5,4)
% plan de front
```

```
\psset{Boule=false}
{\psset{normaleLongitude=180,%
                normaleLatitude=0,%
                Xorigine=40,%
                Yorigine=0,%
                Zorigine=0}
\BouleFrame[fillstyle=solid,fillcolor=OrangePale](-70,-50)(70,10)
\BouleQuadrillage[linecolor=blue,linewidth=0.2mm,grille=10,%
                  Ymin=-50,Ymax=10,Xmax=70,Xmin=-70]}%
% plan horizontal
{\psset{normaleLongitude=0,%
                normaleLatitude=-90,%
                Xorigine=40,%
                Yorigine=0,%
                Zorigine=-10}
\BouleFrame[fillstyle=solid,fillcolor=cyan](70,30)(-70,0)
\BouleQuadrillage[linecolor=blue,linewidth=0.2mm,grille=10,%
                  Ymin=0,Ymax=30,Xmax=70,Xmin=-70]}%
% plan vertical de gauche
{\psset{normaleLongitude=-90,%
                normaleLatitude=0,%
                Xorigine=40,%
                Yorigine=70,%
                Zorigine=-10}
\BouleFrame[fillstyle=solid,fillcolor=yellow](0,0)(30,-60)
\BouleQuadrillage[linecolor=blue,linewidth=0.05mm,grille=10,%
                  Ymin=-60,Ymax=0,Xmin=0,Xmax=30]}
% plan vertical à droite
{\psset{normaleLongitude=-90,%
                normaleLatitude=0,%
                Xorigine=40,%
                Yorigine=-70,%
                Zorigine=-10}
\BouleFrame[fillstyle=solid,fillcolor=yellow](0,0)(30,-60)
\BouleQuadrillage[linecolor=blue,linewidth=0.05mm,grille=10,%
                  Ymin=-60,Ymax=0,Xmin=0,Xmax=30]}
\end{pspicture}
```

5.3 Dessiner un rectangle

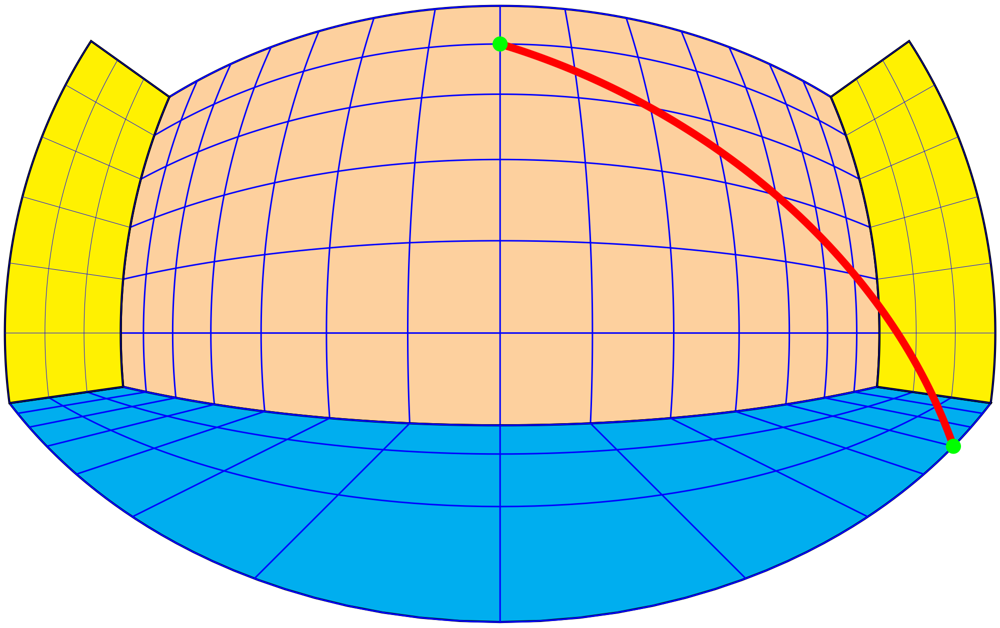
Dans l'exemple précédent, j'ai dessiné les rectangles correspondants aux quadrillages. La commande est identique à celle du quadrillage avec les mêmes paramètres pour l'origine et le vecteur normal au plan. On donne les coordonnées de deux sommets opposés comme dans la commande `\psframe` de PSTricks, dans le plan.

5.4 Tracer une ligne, marquer un point

Un segment de droite est déterminé par les coordonnées de ses extrémités. Un point par ses coordonnées.

```
\BoulePoint(40,0,40){A}
\psdot[dotsize=1mm,linecolor=green](A)
\BoulePoint(10,-40,-10){B}
\psdot[dotsize=1mm,linecolor=green](B)
\BouleLine[linecolor=red](40,0,40)(10,-40,-10)
```

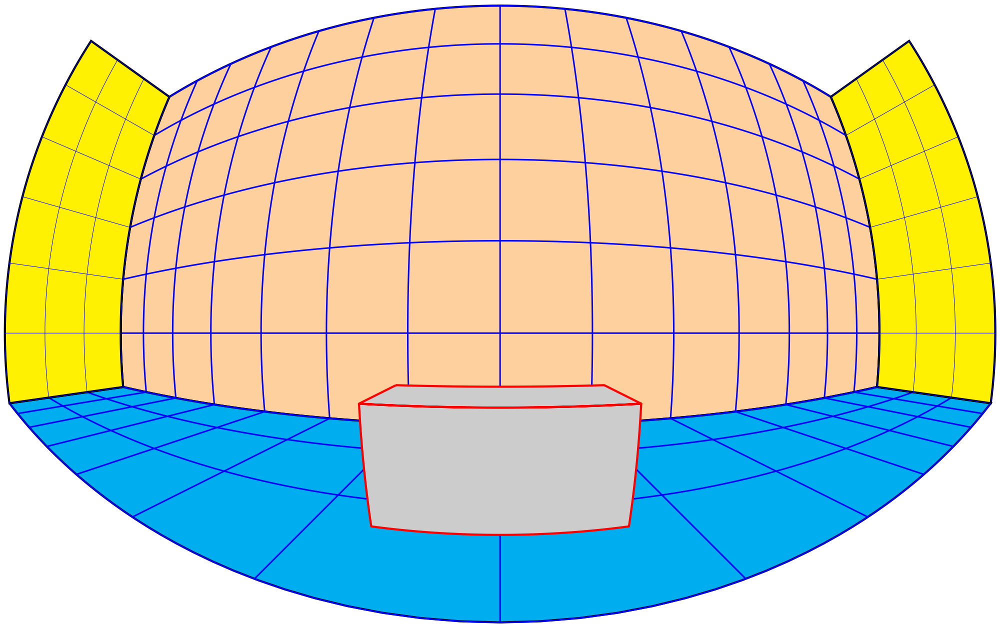
Vous remarquerez que les coordonnées de y sont inversées. Je rappelle que le plan couleur cyan est à la cote $z = -10$.



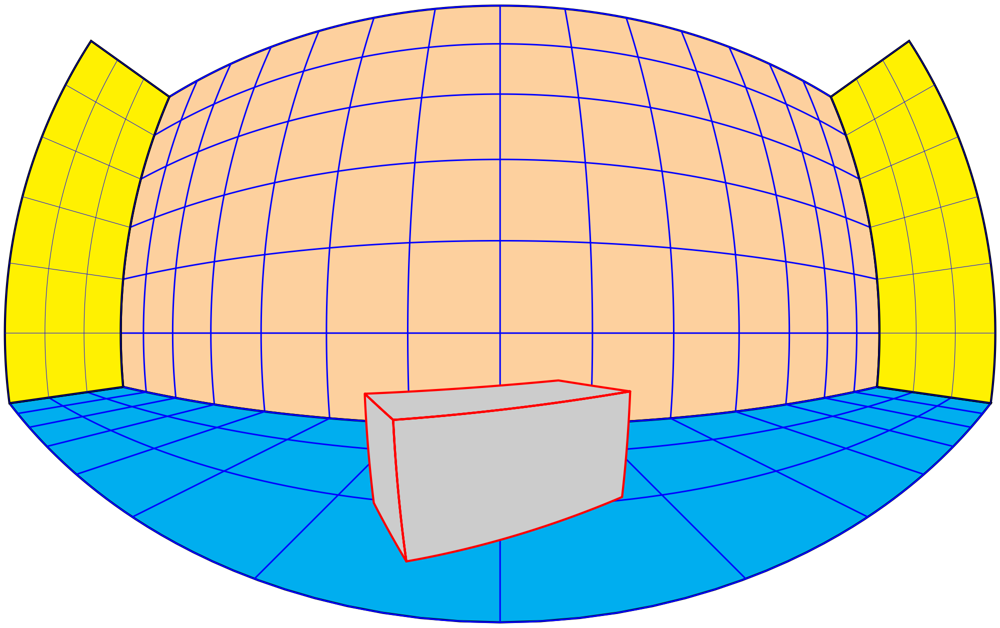
5.5 Parallélépipède

Le parallélépipède est défini par ses trois dimensions A,B,C. On peut le déplacer en fixant les coordonnées de son centre avec : CX,CY,CZ et le faire tourner avec autour des axes avec : RotX,RotY,RotZ dont les valeurs sont par défaut, positionnées à 0.

```
\psset{A=5,B=A,C=A,fillstyle=solid,fillcolor=magenta,linecolor=red}
\psset{CX=10,CZ=-5,CY=0}
\Cube
```



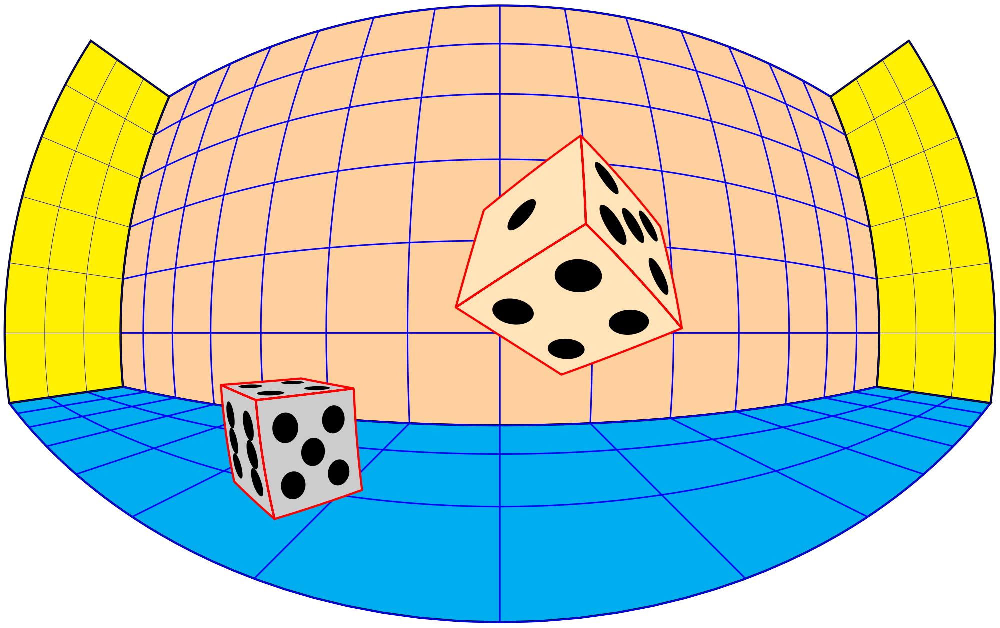
On le fait tourner autour de Oz avec RotZ=30 etc.



```
\psset{CX=15,CZ=-5,CY=0,RotZ=30}
```

5.6 Le dé

Le dé possède une commande propre `\Die`, qui en en interne utilise celle du `Cube` en affichant les points. Voici quelques dés.



```
\psset{A=2.5,B=A,C=A,fillstyle=solid,fillcolor=GrisClair,linecolor=red}
\psset{CX=15,CZ=-5,CY=10,RotZ=60,RotX=90}
\Die
```

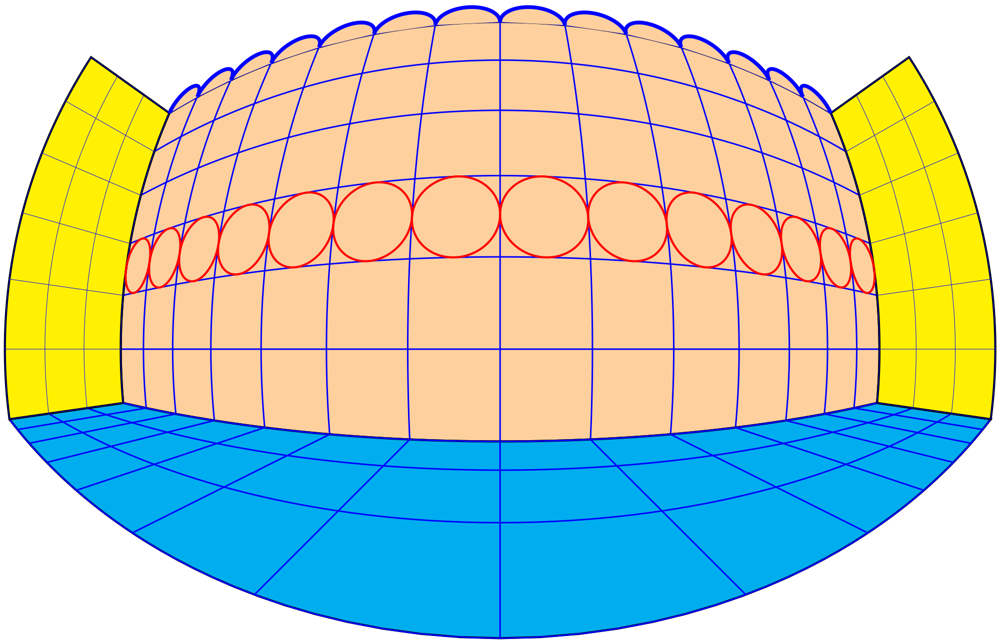
```
\psset{A=5,B=A,C=A,fillstyle=solid,fillcolor=OrangeTresPale,linecolor=red}
\psset{CX=25,CZ=5,CY=-5,RotZ=45,RotY=20,RotX=-60}
\Die
```

5.7 Tracer un cercle ou un arc de cercle

Le cercle et l'arc de cercle seront définis par le plan auquel ils appartiennent. Comme précédemment le plan sera défini par une origine et le vecteur unitaire normal à ce plan. Ces données étant posées, il n'y plus que le rayon du cercle à fixer et les deux angles limites s'il s'agit de l'arc de cercle.

`\BouleCircle[...]{radius}`

`\BouleArc[...]{radius}{angle_min}{angle_max}` : respectez l'ordre des angles limites sinon l'interpréteur PostScript signalera une erreur.

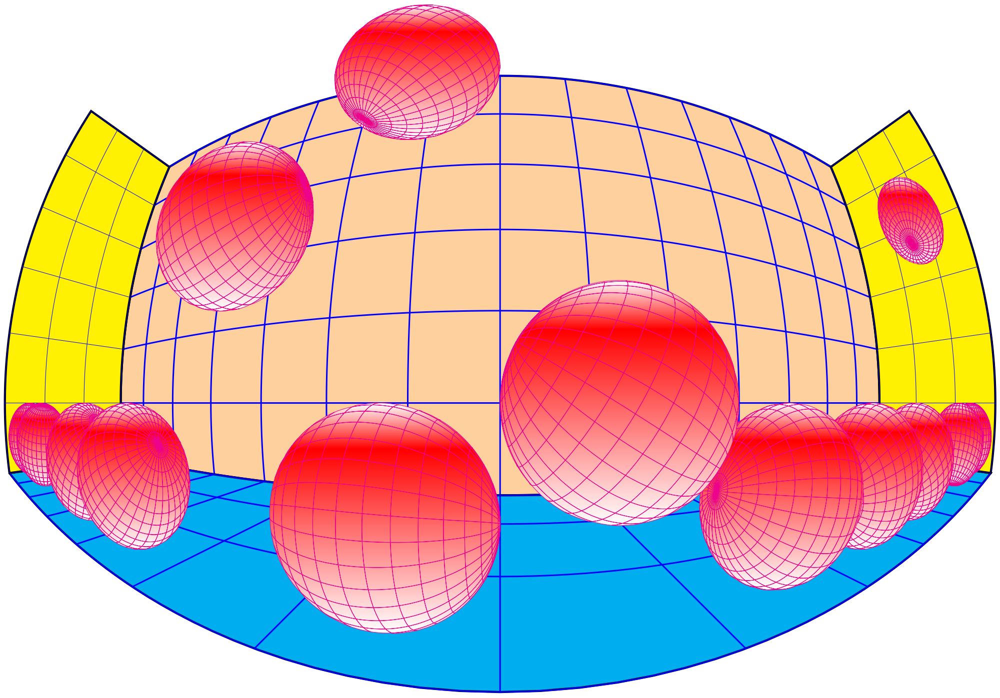


Des cercle et des arcs de cercle sur le plan de front :

```
\psset{normaleLongitude=0,%
                normaleLatitude=0,%
                Xorigine=40}%
\multido{\iYorigine=-65+10}{14}{%
\psset{Yorigine=\iYorigine,Zorigine=15}
\BouleCircle[linecolor=red]{5}}
\multido{\iYorigine=-65+10}{14}{%
\psset{Yorigine=\iYorigine,Zorigine=50}
\BouleArc[linecolor=blue,linewidth=0.5mm,%
          fillstyle=solid,fillcolor=OrangePale]{5}{180}{360}}
```

5.8 La sphère

Elle est définie par son rayon, son centre se place avec les paramètres CX,CY,CZ, on la fait tourner autour de son centre avec RotX,RotY,RotZ.

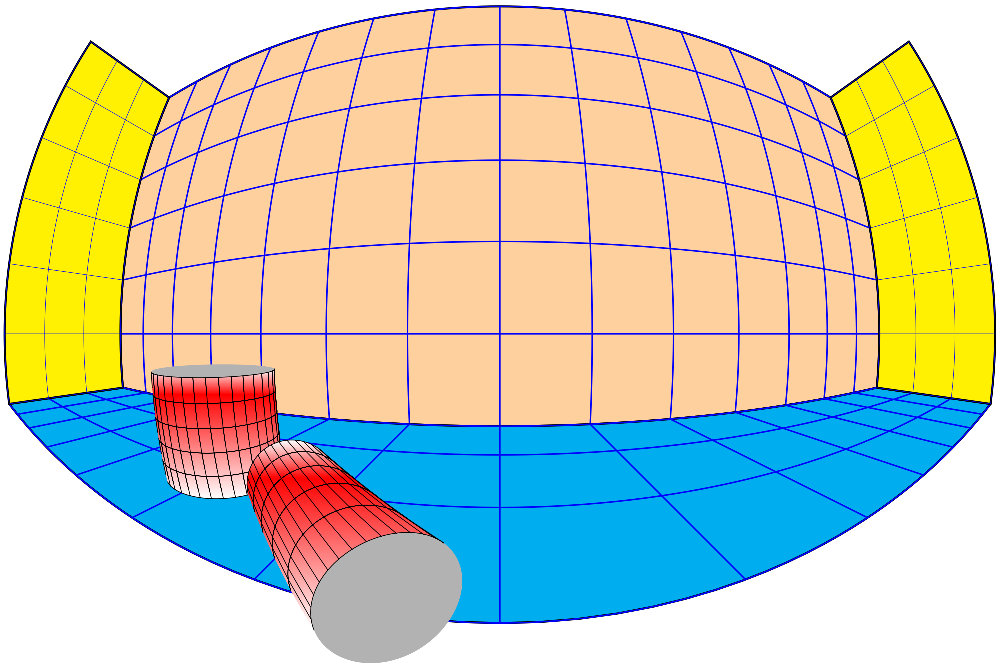


```
\multido{\iCY=-65+10,\iRotX=0+20}{7}{%
\psset{CY=\iCY,CZ=-5,CX=15,RotX=\iRotX}
\psset{fillstyle=gradient,gradbegin=white,gradend=red,%
       gradmidpoint=0.2,linecolor=magenta,linewidth=0.05mm}
\BouleSphere{5}}
```

5.9 Dessiner un cylindre

Le cylindre sera donné par le rayon de sa base et sa hauteur. Le centre de la base sera positionné avec CX,CY,CZ, on le fait tourner autour autour des axes avec RotX,RotY,RotZ.

`\BouleCylindre{radius}{hauteur}`

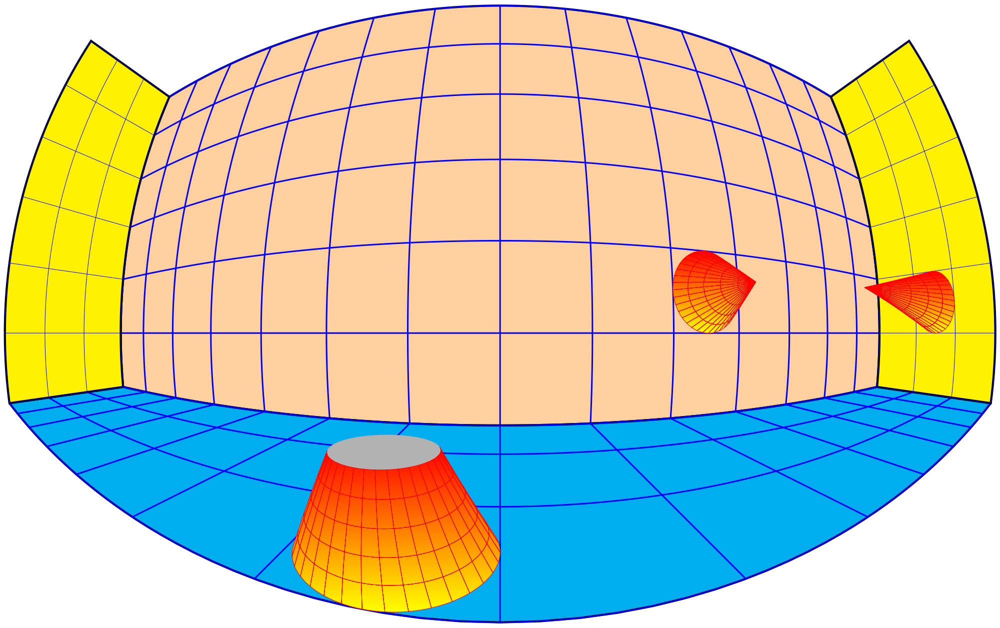


```
\psset{fillstyle=gradient,gradbegin=white,gradend=red,%
       gradmidpoint=0.2,linewidth=0.1mm}
{\psset{CX=20,CY=20,CZ=-10}
\BouleCylindre{5}{7.5}}
{\psset{CX=15,CY=10,CZ=-7.5,RotY=90,RotX=-45}
\BouleCylindre{2.5}{-10}}
```

5.10 Dessiner un cône

Le cône se définit comme le cylindre, rayon de la base, hauteur et en option la fraction de hauteur de cône si l'on souhaite avoir un tronc de cône.

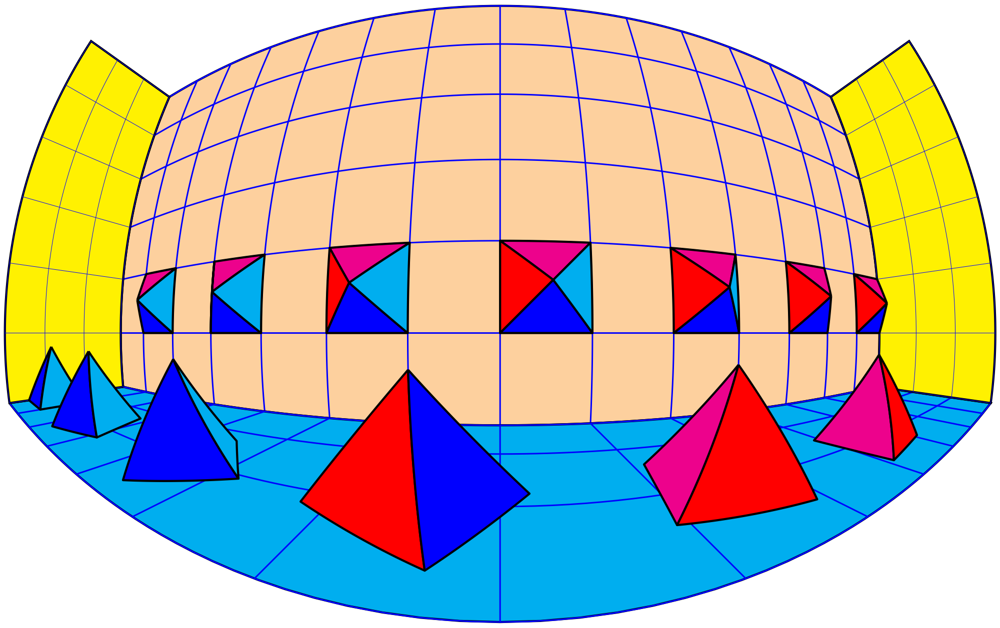
`\BouleCone[fracHcone=0.5]{radius}{hauteur}` fracHcone est obligatoirement un nombre compris entre 0 et 1.



```
{\psset{CX=15,CZ=-10,CY=5,fracHcone=0.5}
\BouleCone{5}{10}}
{\psset{CX=40,CZ=5,CY=-25,RotY=-90}
\BouleCone{5}{10}}
{\psset{CX=25,CZ=5,CY=-70,RotX=-90}
\BouleCone{5}{30}}
```

5.11 Tracer une pyramide

La pyramide à base carrée est donnée par le demi-côté (A)de sa base et sa hauteur (Hpyramide), que l'on peut faire tourner et placer où on veut, comme les objets précédents.



```
\psset{fillstyle=solid,linecolor=black,A=5}
\multido{\nY=-65+20.0}{4}{%
\psset{RotX=0,RotZ=0,RotY=-90,CX=40,CZ=5,CY=\nY,Hpyramide=5}
\Pyramide}
\multido{\nY=65+-20.0,\iRotZ=0+20}{6}{%
\psset{RotX=0,RotZ=\iRotZ,RotY=0,CX=20,CZ=-10,CY=\nY,Hpyramide=8}
\Pyramide}
```

6 Conclusion

Nous pouvons maintenant nous atteler à la tâche de construire des décors en 3D vus dans une boule qui soient intéressants et artistiques, un prolongement vers une animation est toujours possible. J'ai pensé inclure dans ce package, à l'aide d'une option, la 3D conventionnelle : il suffit de changer les formules relatives à la boule et d'y rajouter les paramètres relatifs au point de vue, mais finalement cela aurait trop alourdi cette étude – vous pouvez regardez la commande `\pnodeTroisD` et les nombreuse applications développées dans cette page.

Si vous imaginez d'autres *briques* de décor, ou bien des décors étonnants, je serais heureux que vous me le fassiez savoir.