Compléments théoriques pour PST-MIRROR

Manuel Luque

11 août 2002

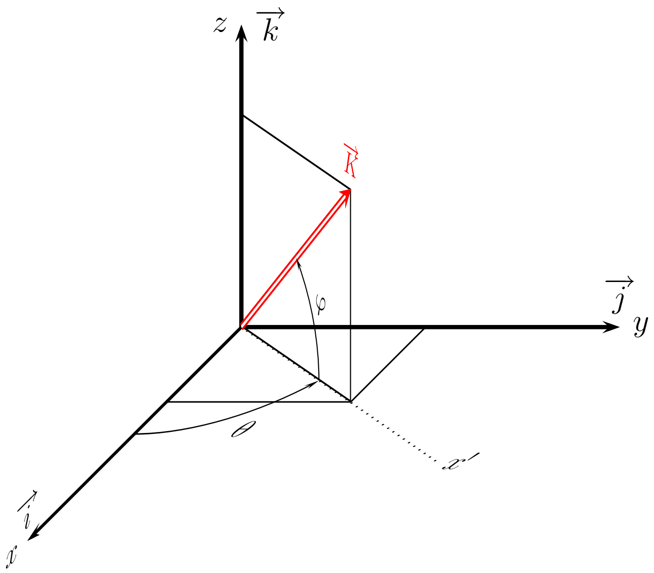
Résumé

Pour illustrer ces compléments, j'utilise le package PST-R3D qui est une adaptation, que j'ai faite, de PST-3D à la perspective cavalière. Dans ce package Timothy Van Zandt avait eu l'idée très ingénieuse de construire la matrice de transformation courante : CTM de `PostScript` à partir des formules de transformation permettant de représenter en projection parallèle dans une direction donnée par les coordonnées de [`viewpoint` $= \mathtt{p_x p_y p_z}$] un plan défini par une normale à ce plan [`normal` $= \mathtt{n_x n_y n_z}$] et un point origine appartenant à ce plan.
J'ai repris cette idée dans PST-R3D, et bien sûr dans ce qui nous intéresse : la vison d'un objet dans une boule-miroir, c'est-à-dire dans le package PST-MIRROR, pour le cas particulier de la définition d'un plan.

Formules de transformation

Formules permettant de passer du repère $(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$ au repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$
$\overrightarrow{K}$ représentera la normale au plan que l'on souhaite dessiner en perspective cavalière. Ce vecteur $\overrightarrow{K}$ est défini par la longitude θ et la latitude φ.
Dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$

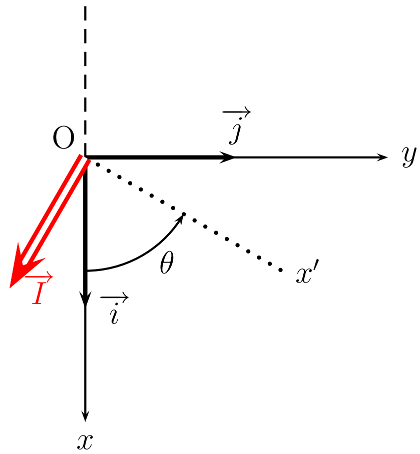
$$\overrightarrow{K} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$



Il faut ensuite choisir les deux autres vecteurs de la base $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$. Je choisis de garder $\overrightarrow{I}$ dans le plan Oxy.

Vu de dessus, dans le plan Oxy :

$$\overrightarrow{I} = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$



Il reste à trouver $\overrightarrow{J}$ pour que la base $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$ soit directe : $\overrightarrow{J} = \overrightarrow{K} \times \overrightarrow{I}$

$$\overrightarrow{J} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta \\ -\cos\varphi \end{pmatrix}$$

La matrice de transformation :

$$A = \begin{pmatrix} \sin\theta & \sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi\cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\sin\theta \\ 0 & -\cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix}$$

permet de déterminer les coordonnées (x, y, z) d'un point M si on connaît ses coordonnées (X, Y, Z) dans le repère $(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta & \sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi\cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\sin\theta \\ 0 & -\cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{lllllll} x & = & X\sin\theta & + & Y\sin\varphi\cos\theta & + & Z\cos\varphi\cos\theta \\ y & = & -X\cos\theta & + & Y\sin\varphi\sin\theta & + & Z\cos\varphi\sin\theta \\ z & = & & & -Y\cos\varphi & + & Z\sin\varphi \end{array} \right.$$

Si l'on considère un point du plan appartenant au plan XOY $(Z = 0)$:

$$\left\{ \begin{array}{lllll} x & = & X\sin\theta & + & Y\sin\varphi\cos\theta \\ y & = & -X\cos\theta & + & Y\sin\varphi\sin\theta \\ z & = & & & -Y\cos\varphi \end{array} \right.$$

Et si maintenant, ce repère $OXYZ$ est translaté en un point $O'(x_{O'}, y_{O'}, z_{O'})$

$$\left\{ \begin{array}{lllllll} x & = & X\sin\theta & + & Y\sin\varphi\cos\theta & + & x_{O'} \\ y & = & -X\cos\theta & + & Y\sin\varphi\sin\theta & + & y_{O'} \\ z & = & & & Y\cos\varphi & + & z_{O'} \end{array} \right.$$

Ce sont ces formules que j'ai utilisées pour définir, les cercles et les rectangles.