Devoir surveillé n° 3

3e F – Le mercredi 21/11/2007

Calculatrice interdite

■ Exercice 1.

1) Développer et réduire ces nombres de façon à obtenir l'écriture la plus simple possible :

$$a = \left(\sqrt{6}-1\right)^2 + \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2 \qquad b = \sqrt{2}\left(\sqrt{6}+1\right) - \sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right) \qquad c = \left(3\sqrt{5}+5\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{10}-3\right)$$

2) Calculer ces nombres et donner les résultats sous la forme la plus simple, sans racine carrée au dénominateur :

$$d = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \qquad e = \frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$$

■ Exercice 2.

On donne l'expression littérale suivante : $E = (4x-5)(5x-3) - (4x-5)^2$

1) Développer et réduire E.

2) Factoriser E.

3) Calculer la valeur de E lorsque :

a) $x = \sqrt{2}$

b) $x = \dfrac{1}{4}$

■ Exercice 3.

Montrer par le calcul que ces nombres sont égaux :

$$a = 3\sqrt{75} - 4\sqrt{27} - 2\sqrt{3} \qquad b = \frac{3}{\sqrt{28}} \times \sqrt{20} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{15}} \qquad c = \left(3-\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$$

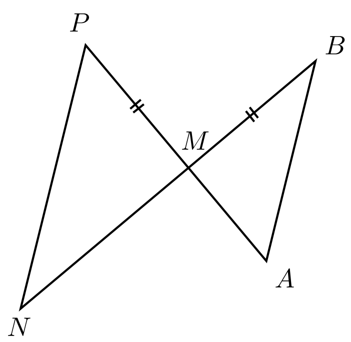
■ Exercice 4.

La figure ci-contre n'est pas à l'échelle et n'est représentée en vraie grandeur. Elle ne sert qu'à indiquer la disposition des points de cet exercice.

La figure n'est pas à reproduire.

On donne les longueurs suivantes en cm :

- $PM = BM = \sqrt{6}$
- $MN = 3\sqrt{2}$
- $MA = \sqrt{2}$



1) Montrer que les droites (PN) et (AB) sont parallèles.

2) On donne $AB = 2\sqrt{2}$ cm.
Calculer la longueur PN.

3) On donne les valeurs approchées des côtés du triangle MAB :

- $AM = \sqrt{2} \simeq 1,41$ cm
- $BM = \sqrt{6} \simeq 2,45$ cm
- $AB = 2\sqrt{2} \simeq 2,83$ cm

a) Démontrer que le triangle MAB est rectangle.

b) Calculer l'aire du triangle MAB, et donner le résultat sous la forme $\sqrt{a}$ où a est un entier.

■ Pour chercher...

Démontrer que si n est un nombre entier positif, alors le nombre $N = (n+\sqrt{n})^2 + (n-\sqrt{n})^2$ est également un nombre entier que l'on calculera.

Utiliser le résultat trouvé ci-dessus pour donner la valeur de : $\left(19+\sqrt{19}\right)^2 + \left(19-\sqrt{19}\right)^2$

Correction du devoir surveillé n° 3

■ Exercice 1.

1) $a = \left(\sqrt{6}-1\right)^2 + \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$
$a = (\sqrt{6})^2 - 2\sqrt{6} + 1 + (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{6} + (\sqrt{2})^2$
$a = 6 - \cancel{2\sqrt{6}} + 1 + 3 + \cancel{2\sqrt{6}} + 2$
$\boldsymbol{a = 12}$

$b = \sqrt{2}\left(\sqrt{6}+1\right) - \sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)$
$b = \sqrt{12} + \sqrt{2} - 2\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2$
$b = \sqrt{4}\sqrt{3} + \sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 3$
$b = \cancel{2\sqrt{3}} + \sqrt{2} - \cancel{2\sqrt{3}} + 3$
$\boldsymbol{b = 3 + \sqrt{2}}$

$c = \left(3\sqrt{5} + 5\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{10} - 3\right)$
$c = 3\sqrt{50} - 9\sqrt{5} + 5\sqrt{20} - 15\sqrt{2}$
$c = 3\sqrt{25}\sqrt{2} - 9\sqrt{5} + 5\sqrt{4}\sqrt{5} - 15\sqrt{2}$
$c = \cancel{15\sqrt{2}} - 9\sqrt{5} + 10\sqrt{5} - \cancel{15\sqrt{2}}$
$\boldsymbol{c = \sqrt{5}}$

2) $d = \dfrac{10\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \dfrac{10\sqrt{3}\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}}$
$d = \dfrac{10\sqrt{15}}{5}$
$\boldsymbol{d = 2\sqrt{15}}$

$e = \dfrac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$
$e = \dfrac{(3-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$
$e = \dfrac{3\sqrt{2} + 3 - (\sqrt{2})^2 - \sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2 - 1^2}$
$e = \dfrac{3\sqrt{2} + 3 - 2 - \sqrt{2}}{1}$
$\boldsymbol{e = 2\sqrt{2} + 1}$

■ Exercice 2.

1) $E = (4x-5)(5x-3) - (4x-5)^2$
$E = 20x^2 - 12x - 25x + 15 - (16x^2 - 40x + 25)$
$E = 20x^2 - 12x - 25x + 15 - 16x^2 + 40x - 25$
$\boldsymbol{E = 4x^2 + 3x - 10}$

2) $E = (4x-5)(5x-3) - (4x-5)(4x-5)$
$E = (4x-5)[(5x-3) - (4x-5)]$
$E = (4x-5)(5x-3-4x+5)$
$\boldsymbol{E = (4x-5)(x+2)}$

3) **a)** $E = 4(\sqrt{2})^2 + 3\sqrt{2} - 10$
$E = 8 + 3\sqrt{3} - 10$
$\boldsymbol{E = -2 + 3\sqrt{3}}$

b) $E = \left(\cancel{4} \times \dfrac{1}{\cancel{4}} - 5\right) \times \left(\dfrac{1}{4} + 2\right)$
$E = (1-5) \times \left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{8}{4}\right)$
$E = -\cancel{4} \times \dfrac{9}{\cancel{4}}$
$\boldsymbol{E = -9}$

■ Exercice 3.

$a = 3\sqrt{75} - 4\sqrt{27} - 2\sqrt{3}$
$a = 3\sqrt{25}\sqrt{3} - 4\sqrt{9}\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$
$a = 15\sqrt{3} - 12\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$
$\boldsymbol{a = \sqrt{3}}$

$b = \dfrac{3}{\sqrt{28}} \times \sqrt{20} \times \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{15}}$
$b = \dfrac{3}{\cancel{\sqrt{4}}\cancel{\sqrt{7}}} \times \cancel{\sqrt{4}}\cancel{\sqrt{5}} \times \dfrac{\cancel{\sqrt{7}}}{\sqrt{3}\cancel{\sqrt{5}}}$
$b = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \dfrac{\cancel{3}\sqrt{3}}{\cancel{(\sqrt{3})^2}}$
$\boldsymbol{b = \sqrt{3}}$

$c = \left(3-\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$
$c = 3\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - \sqrt{18} - \sqrt{12}$
$c = 3\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - \sqrt{9}\sqrt{2} - \sqrt{4}\sqrt{3}$
$c = 3\sqrt{3} + \cancel{3\sqrt{2}} - \cancel{3\sqrt{2}} - 2\sqrt{3}$
$\boldsymbol{c = \sqrt{3}}$

Les nombres sont tous égaux à $\sqrt{3}$, on a donc bien $\boldsymbol{a = b = c}$

■ Exercice 4.

1) $\dfrac{MP}{MA} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\cancel{\sqrt{2}}\sqrt{3}}{\cancel{\sqrt{2}}} = \sqrt{3}$ $\qquad$ $\dfrac{MN}{MB} = \dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \dfrac{3\sqrt{2} \times \sqrt{6}}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \dfrac{3\sqrt{2} \times \sqrt{2}\sqrt{3}}{6} = \dfrac{\cancel{3 \times (\sqrt{2})^2}\sqrt{3}}{\cancel{6}} = \sqrt{3}$

On obtient l'égalité $\dfrac{MP}{MA} = \dfrac{MN}{MB}$, les points M, P, A et M, N, B sont alignés dans le même ordre, donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, **les droites (PN) et (AB) sont parallèles**.

2) Les droites (PA) et (NB) se coupent en M, les droites (PN) et (AB) sont parallèles, donc d'après le théorème de Thalès : $\dfrac{MP}{MA} = \dfrac{MN}{MB} = \dfrac{PN}{AB}$ donc $\sqrt{3} = \sqrt{3} = \dfrac{PN}{2\sqrt{2}}$: on en tire que $PN = \sqrt{3} \times 2\sqrt{2} = \boldsymbol{2\sqrt{6}}$ **cm**

3) **a)** Le plus long côté du triangle MAB est $[AB]$.
$AB^2 = (2\sqrt{2})^2 = 4(\sqrt{2})^2 = 8$ $\qquad$ $MA^2 + MB^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6})^2 = 2 + 6 = 8$
On obtient l'égalité $AM^2 = BA^2 + BM^2 AB^2 = MA^2 + MB^2$, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, **le triangle ABM est rectangle en B**.

b) $\text{Aire}_{MAB} = \dfrac{MA \times MB}{2} = \dfrac{\sqrt{2} \times \sqrt{6}}{2} = \dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\cancel{\sqrt{4}}\sqrt{3}}{\cancel{2}} = \boldsymbol{\sqrt{3}}$ **cm²**

■ Pour chercher. . .

$N = (n + \sqrt{n})^2 + (n - \sqrt{n})^2 = n^2 + \cancel{2n\sqrt{n}} + (\sqrt{n})^2 + n - \cancel{2n\sqrt{n}} + (\sqrt{n})^2 = 2n^2 + 2n = \boldsymbol{2n(n+1)}$
En prenant $n = 19$, on obtient $(19 + \sqrt{19})^2 + (19 - \sqrt{19})^2 = 2 \times 19 \times (19+1) = 38 \times 20 = \mathbf{760}$