Références au programme

Programme officiel

Contenus	Compétences exigibles	Commentaires
Fonction linéaire et fonction affine Fonction linéaire	Connaître et utiliser la notation $x \longmapsto ax$ pour une valeur numérique de a fixée.	La définition d'une fonction linéaire, de coefficient a, s'appuie sur l'étude des situations de proportionnalité rencontrées dans les classes précédentes. On pourra recourir à des tableaux de proportionnalité et on mettra en évidence que le processus de correspondance est "je multiplie par a". Pour des pourcentages d'augmentation ou de diminution, une mise en évidence similaire peut être faite ; par exemple, augmenter de 5 %, c'est multiplier par 1,05 et diminuer de 5 %, c'est multiplier par 0,95.
	Déterminer l'expression algébrique d'une fonction linéaire à partir de la donnée d'un nombre non nul et de son image.	L'étude de la fonction linéaire est aussi une occasion d'utiliser la notion d'image. On introduira la notation $x \longmapsto ax$, pour la fonction. Á propos de la notation des images $f(2)$, $f(-0,25)\ldots$, on remarquera que les parenthèses y ont un autre statut qu'en calcul algébrique.
	Représenter graphiquement une fonction linéaire. Lire sur la représentation graphique d'une fonction l'image d'un nombre donné et le nombre ayant une image donnée.	L'énoncé de Thalès permet de démontrer que la représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine ; cette droite a une équation de la forme $y = ax$. On interprétera graphiquement le nombre a, coefficient directeur de la droite. C'est une occasion de prendre conscience de l'existence de fonctions dont la représentation graphique n'est pas une droite (par exemple, en examinant comment varie l'aire d'un carré quand la longueur de son côté varie de 1 à 3).

Textes d'accompagnement

Jusqu'à la fin du cycle central, la notion de fonction n'a été utilisée que de manière implicite. Les transformations géométriques étudiées n'ont pas été présentées comme application du plan dans lui-même. Le travail sur la proportionnalité, et plus largement sur l'étude de relations entre données numériques, a permis d'utiliser des formules, des tableaux de nombres et des représentations dans le plan muni d'un repère, en particulier comme outils pour résoudre des problèmes. Ainsi, à l'occasion du traitement de situations numériques ou géométriques, les élèves ont été amenés à passer d'un langage à un autre (par exemple, d'une formule ou d'un graphique à un tableau de nombres). Mais, si des expressions telles que « en fonction de » ou « est fonction de » ont été utilisées, les fonctions numériques associées à ces formules, à ces tableaux ou à ces représentations n'ont pas été explicitées.

La classe de $3^{\text{ème}}$ est donc l'occasion du premier véritable contact des élèves avec cette notion de fonction, dans sa conception actuelle qui fait correspondre à tout élément d'un ensemble un élément d'un autre ensemble. Mais il ne s'agit pas de donner une définition générale de la notion de fonction. Le travail est limité à l'étude de fonctions particulières : les fonctions linéaires et affines. D'autres exemples de fonctions simples seront également utilisés, en particulier pour montrer que toute représentation graphique ne se réduit pas à un ensemble de points alignés (par exemple, en représentant quelques points d'une fonction telle que $x \longmapsto x^2$, sur un intervalle). Au lycée, la notion de fonction occupera une place centrale, dans le cadre de l'enseignement de l'analyse. La notion de fonction linéaire permet, en $3^{\text{ème}}$, d'opérer une synthèse des différents aspects de la proportionnalité rencontrés tout au long du collège et de les exprimer dans un nouveau langage. Toute situation de proportionnalité est modélisable par une fonction linéaire. Dans cette perspective, il convient d'être attentif, avec les élèves, aux questions soulevées par le domaine d'adéquation du modèle mathématique avec la situation traitée, en ayant soin de préciser, chaque fois, le domaine de signification de la fonction (définie, elle, sur l'ensemble des réels) dans le contexte de la situation traitée (qui impose souvent une restriction à un intervalle ou à un nombre fini de valeurs).

La fonction linéaire doit apparaître comme un cas particulier de la fonction affine, cette dernière étant associée à la proportionnalité des accroissements.

L'apprentissage des langages permettant de traduire les relations fonctionnelles doit faire l'objet d'une attention toute particulière. La notation $x \longmapsto ax$ ne sera introduite que pour des valeurs particulières de a, en liaison avec le coefficient de proportionnalité et d'expressions verbales du type « Pour passer d'un nombre à son image, je multiplie par a». La notation $f(x)$ est également introduite pour des valeurs particulières de la variable (du type $f(2)$, $f(-3)\ldots$), mais on veillera à différencier avec les élèves le statut des parenthèses dans ce type de notation de leur signification dans un calcul algébrique. Les notations fonctionnelles amènent à utiliser des lettres avec une nouvelle signification : successivement, au collège, les lettres ont ainsi été utilisées de façon « expressive » en référence à des grandeurs (comme dans la formule de l'aire du rectangle), pour désigner des valeurs inconnues (dans les équations), des valeurs indéterminées (dans les identités remarquables, par exemple) et enfin des variables (dans le langage des fonctions). Les difficultés à comprendre le statut différent des lettres, et du signe $=$, dans ces différents contextes justifient le fait que la notion d'équation de droite ne soit pas abordée au collège.

Le travail sur des situations modélisables par des fonctions classiques est l'occasion de formuler un même problème dans différents cadres et d'habituer les élèves à passer d'un cadre à l'autre, pour interpréter des résultats ou des propriétés : formules, tableaux de nombres, fonctions, représentations graphiques. C'est en particulier ce qui permettra d'utiliser une représentation graphique pour la résolution d'un système d'équations à deux inconnues.

1 Proportionnalité et relation $y = ax$

Au marché du Galion, le kilo de tomates est vendu 2 € le kilo. Si j'en achète 3 kilos, je paie $3 \times 2 = 6$ €. Si j'en achète le double, je paie le double ; si j'en achète la moitié moins, je paie la moitié moins. Ainsi, le prix varie dans les mêmes proportions que le poids acheté. On dit que le prix est **proportionnel** au poids.
De même, le côté et le périmètre d'un triangle équilatéral sont proportionnels.

Côté	2	4	2,5	x
Périmètre	6	12	7,5	$3x$

On remarque que l'on passe des nombres de la première ligne aux nombres correspondants dans la deuxième en les multipliant par 3 ; pour calculer le périmètre y du triangle équilatéral, on multiplie le côté x par 3 : $y = 3 \times x = 3x$.

Propriété : Si les valeurs d'une grandeur y sont proportionnelles aux valeurs de x, alors il existe un nombre a tel que $y = ax$.
Réciproquement, s'il existe un nombre fixe a tel que $y = ax$, alors les valeurs de y sont proportionnelles aux valeurs de x.

Exemples : le périmètre d'un cercle est proportionnel à son diamètre car on a la formule $périmètre = \pi \times rayon$; on obtient toujours le périmètre d'un cercle en multipliant son diamètre par π.

1.1 Caractérisations : comment reconnaître une situation de proportionnalité ?

Règle d'égalité des quotients : Il y a proportionnalité dans un tableau lorsque tous les couples de termes qui se correspondent donnent le même quotient.

Exemples :

2	-5	14
-3	7,5	-21

$$\frac{-3}{2} = \frac{7,5}{-5} = \frac{-21}{14} = -1,5$$

Tous les quotients sont égaux, il y a donc proportionnalité.

12	15	35
7,2	9	28

$$\frac{7,2}{9} = \frac{9}{15} = 0,6$$

mais $\frac{28}{35} = 0,8$ Tous les quotients ne sont pas égaux, il n'y a donc pas proportionnalité.

Règle d'égalité des produits en croix : Il y a proportionnalité dans un tableau lorsque tous les couples de termes qui se correspondent donnent le même quotient.

Exemples :

2	6
5	14

$$2 \times 14 \neq 6 \times 5$$

Il n'y a pas proportionnalité.

2	5
6	15

$$2 \times 15 = 6 \times 5$$

Il y a proportionnalité.

1.2 Calculer une quatrième proportionnelle : règle de trois

x	6
8	25

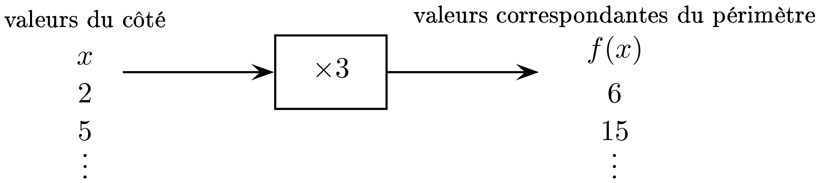
On considère un tableau de proportionnalité et l'on souhaite déterminer la valeur de x.
On écrit que les produits en croix sont égaux $x \times 25 = 8 \times 6$ soit $25x = 48$ donc $x = \frac{6\times 8}{25} = \frac{48}{25} = 1,92$.

Remarque : ce calcul est valable en cas de quotients égaux : si x est tel que $\frac{11}{x} = \frac{14}{25}$ alors $x \times 14 = 11 \times 25$ donc $x = \frac{11 \times 25}{14} = 3,96$.

2 Fonction linéaire

2.1 Définition

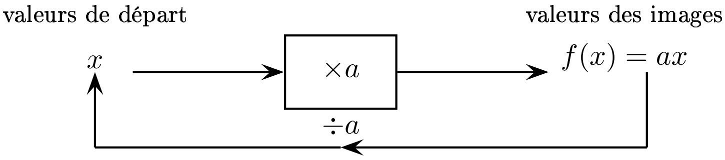
On reprend l'exemple du périmètre du triangle équilatéral :



Quand on veut le périmètre connaissant le côté, on multiplie par 3 (gauche vers droite) et quand on veut le côté connaissant le périmètre, on divise par 3 (droite vers gauche).
Le procédé associant le côté à son périmètre définit une **fonction linéaire de coefficient 3**.

Définition : Soit a un nombre fixé.
Le procédé $f : x \longmapsto ax$, qui au nombre x associe le nombre ax s'appelle
la fonction linéaire de coefficient de linéarité a.
On écrit aussi $f(x) = ax$ et on dit que ax est **l'image** de x par f

calul de f(x) : pour calculer $f(x)$, on multiplie x par a, pour calculer x connaissant son image ax on divise par le coefficient de linéarité :



2.2 Pourcentages et fonctions linéaires

appliquer un pourcentage à une quantité, appliquer une augmentation en pourcentage, appliquer une diminution en pourcentage reviennent à appliquer une fonction linéaire :

	Prendre 6% de x, c'est multiplier x par 0,06	Augmenter x de 6%, c'est multilplier x par 1,06	Diminuer x de 6%, c'est multiplier x par 0,94
Expression algébrique	$x \times \frac{6}{100} = 0,6x$	$x + \frac{6}{100}x = \left(1 + \frac{6}{100}\right)x = 1,06x$	$x - \frac{6}{100}x = \left(1 - \frac{6}{100}\right)x = 0,94x$
Fonction linéaire	$f : x \longmapsto 0,06x$	$f : x \longmapsto 1,06x$	$f : x \longmapsto 0,94x$

3 Représentation graphique d'une fonction linéaire

On peut associer une droite à une situation de proportionnalité ; il en est de même pour une fonction linéaire. Une fonction linéaire décrit une situation de proportionnalité, elle est donc associée à une droite passant par l'origine.

Définition : Soit $f : x \longmapsto ax$ une fonction linéaire.
La représentation graphique de f est l'ensemble des points de coordonnées $(x; ax)$. (couples (points ; images)).

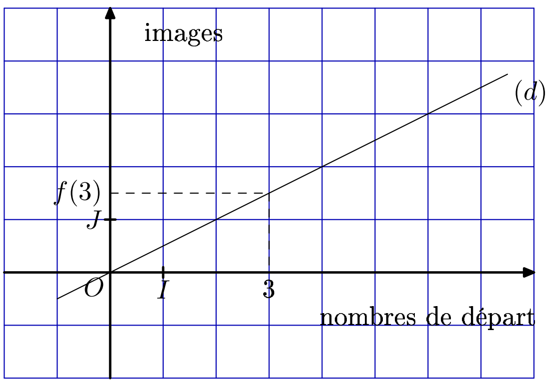
Parmi tous les points de cette représentation, il en est deux remarquables :
- $f(0) = a \times 0 = 0$ donc l'origine est toujours un point de cette représentation ;
- $f(1) = a \times 1$ donc le point de coordonnées $(1; a)$ est toujours un point de cette représentation.

Propriété : Dans un repère, la représentation graphique de la fonction linéaire de coefficient linéaire a est la droite qui passe par l'origine O du repère et par le point de coordonnées $(1; a)$.

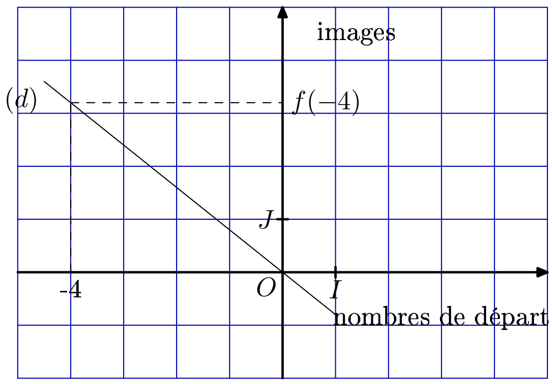
Définition : On dit que $y = ax$ est une équation de la droite qui représente graphiquement la fonction linéaire de coefficient linéaire a.
a est appelé le **coefficient directeur** de cette droite.

Exemples :

Représentation graphique de $f(x) = \frac{1}{2}x$



Représentation graphique de $f(x) = -0,8x$



On voit que la représentation graphique d'une fonction linéaire de coefficient positif est "une droite qui monte" alors que celle d'une fonction linéaire de coefficient négatif est "une droite qui descend".

Conséquence : Pour tracer la représentation graphique d'une fonction linéaire il suffit de connaître un nombre et son image, l'origine étant toujours un point de cette représentation.