Dérivation

1 Limite réelle d'une fonction en zéro

1.1 Exemple

La fonction $g\,:\,x \longmapsto \frac{2(1+x)^2-2}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$; $g(0)$ n'existe pas mais $g(x)$ est calculable pour toutes les valeurs de x très voisines de zéro.
On se pose alors la question suivante :
"Que deviennent les nombres $g(x)$ lorsque x prend des valeurs très voisines de zéro".
Répondre à cette question, c'est **étudier la limite en zéro de** g.
Ici, pour répondre à cette question, on procède à une habile réécriture de $g(x)$: en effet pour tout x non nul, $g(x) = \frac{2(1+x)^2-2}{x} = 4+2x$.
Intuitivement on peut alors préssentir que lorsque x prend des valeurs de plus en plus voisines de zéro, les nombres $g(x)$ viennent s'accumuler autour de 4.
Plus précisément, on peut prouver que les nombres $g(x)$ finissent par se trouver dans tout intervalle $I =]4-\alpha; 4+\alpha[$, **aussi petit que soit** α ($\alpha > 0$).
En effet si $\alpha > 0$, dire que $4-\alpha < g(x) < 4+\alpha$ équivaut à dire que $4-\alpha < 4+2x < 4+\alpha$ soit $-\frac{\alpha}{2} < x < \frac{\alpha}{2}$. Ainsi, quel que soit $\alpha > 0$, les nombres $g(x)$ se trouvent dans I lorsque $-\frac{\alpha}{2} < x < \frac{\alpha}{2}$. On écrit alors

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 4$$

1.2 Cas général

f est une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$ telle que 0 appartient à $\mathcal{D}_f$ ou en est une borne.
Intuitivement, dire que la fonction f **a pour limite le nombre** l **en zéro**, signifie que lorsque x prend des valeurs de plus en plus voisines de zéro, les nombres $f(x)$ correspondants viennent s'accumuler autour de l. **Plus précisément** cela signifie qu'ils finissent par se trouver dans tout intervalle $]l-\alpha; l+\alpha[$, aussi petit que soit $\alpha > 0$. On écrit alors :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = l.$$

Remarques :
– Lorsque la variable est u on écrit $\lim_{u\to 0} f(u) = l$. Lorsque la variable est h et la fonction est t on écrit $\lim_{h\to 0}\ t(h) = l$.
– Il existe des fonctions qui n'ont pas de limite réelle en zéro : c'est le cas de la fonction inverse. . . intuitivement, si x prend des valeurs de plus en plus voisines de 0 (par exemple 10^{-10} ; -10^{-100} ; 10^{-1000} ; -10^{-10000}) alors les valeurs absolues des nombres $f(x)$ correspondants (10^{-10} ; 10^{-100} ; 10^{-1000} ; 10^{-10000}) sont de plus en plus grandes vers l'infini. Ces nombres ne peuvent donc pas s'accumuler autour d'un réel.

1.3 Résultats à connaître

Cette année, les calculs de limite s'obtiendront avec d'habiles réécritures des expressions et "des arguments très proches de l'intuition" qui sont en fait justifiés par les résulats suivants que nous admettrons :

1. $\lim_{x\to 0}\sqrt{x} = 0$; $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$; $\lim_{x\to 0} x^n = 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$).
   Si P est une fonction polynôme, $\lim_{x\to 0} P(x) = P(0)$ et si F est une fonction rationnelle définie en 0, $\lim_{x\to 0} F(x) = F(0)$.
2. Si P est une fonction polynôme et F une fonction rationnelle, définies et positives au voisinage de 0, alors $\lim_{x\to 0}\sqrt{P(x)} = \sqrt{P(0)}$ et $\lim_{x\to 0}\sqrt{F(x)} = \sqrt{F(0)}$.
3. Si $\lim_{x\to 0} f(x) = l$ et $\lim_{x\to 0} g(x) = l'$ alors $\lim_{x\to 0}(f+g)(x) = l+l'$ et $\lim_{x\to 0}(fg)(x) = ll'$.

Exercice 1

Justifiez à l'aide des résultats précédents les calculs de limites suivants :

1. $\lim_{x\to 0} f(x)$ où $f(x) = -2x + 3$;
2. $\lim_{x\to 0} g(x)$ où $g(x) = 2x\sqrt{2x + 5}$;
3. $\lim_{h\to 0} t(h)$ où $t(h) = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h}$ et a un réel quelconque.

2 Nombre dérivé

2.1 Approche

Traitez les exercices page $58 - 59$ de votre manuel.

1. Synthèse de l'activité 1 :
   Calculer une vitesse moyenne entre deux instants très très proche n'est pas satisfaisant pour obtenir une vitesse instantanée. La seule façon d'obtenir celle-ci est de considérer la limite en zéro d'une fonction du type $h \longmapsto \frac{d(a+h)-d(a)}{h}$.
2. Synthèse de l'activité 2 :
   Sur la courbe de la fonction carré f, nous avons fixé un point : le point $A(1, f(1))$. Puis nous nous sommes demandés comment définir ce qui correspond à l'idée intuitive que l'on se fait d'une tangente à cette courbe au point A. Pour cela nous avons pris un point "courant" sur cette courbe : le point M distinct du point A puis nous nous sommes intéressés au comportement des sécantes (AM) lorsque le point M prend des valeurs de plus en plus voisines de A.
   Pour tout point M, la sécante (AM) passe par A donc pour connaître le comportement de ces sécantes l'idée est d'étudier les coefficients directeurs de ces sécantes lorsque le point M prend des valeurs de plus en plus voisines de A.
   Pour cela nous avons posé $1 + h$ l'abscisse de M : puisqu'il est distinct de A, $h \neq 0$ et, puisque'il est sur la courbe son ordonnée est $f(1+h)$. Il en résulte que le coefficient directeur, que l'on note $t(h)$,de la sécante (AM), vaut $t(h) = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 2 + h$. Enfin dire que M prend des valeurs de plus en plus voisines de A c'est dire que h prend des valeurs de plus en plus voisines de zéro, d'où l'idée d'étudier la limite en zéro de la fonction $h \longmapsto t(h)$. Comme $\lim_{h\to 0} t(h) = 2$ on conçoit que la droite Δ qui passe par A et de coefficient directeur 2 est la "position limite" des sécantes (AM) lorsque le point M prend des valeurs de plus en plus voisines de A. De plus lorsque l'on regarde la figure cette "position limite" répond à l'idée que l'on se fait de la tangente à la courbe au point A : on la définira comme cela... Ainsi pour répondre à un problème de tangente à une courbe nous avons étudié une limite en zéro d'une fonction du type $h \longmapsto \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

2.2 Définitions

Nous avons vu, dans la section approche, pour résoudre des problèmes de vitesse instantanée ou de tangente, la nécessité de s'intéresser au problème suivant :
f est une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$ et a est un nombre de $\mathcal{D}_f$. A tout réel h non nul, tel que $a + h$ est dans $\mathcal{D}_f$, on peut associer le nombre $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. La fonction $h \longmapsto t(h)$ a-t-elle une limite en zéro ?

Définition 1 *Dans les conditions précédentes :*
Dire que la fonction f **est dérivable au point** *a signifie que la fonction $h \longmapsto \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite réelle l en zéro. Cette limite l est appelée* **le nombre dérivé** *de f au point a. On le note $f'(a)$.*

Remarques :

– Le nombre $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est appelé **taux de variation** de f entre a et $a + h$. En général, on le note $t(h)$. Il est défini lorsque h est non nul et tel que $a + h$ soit dans $\mathcal{D}_f$. Lorsque que l'on écrira un taux de variation il sera implicite que ces deux conditions sont remplies.

– Lorsque f est dérivable au point a, le nombre dérivé, l, de f au point a est noté $f'(a)$ donc dans ces conditions :

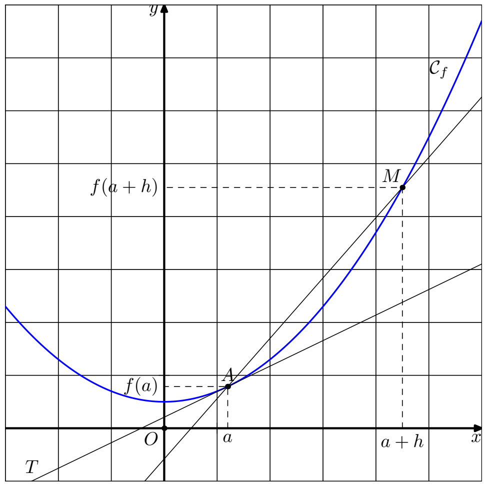
$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

3 Applications de la dérivation en point

Désormais, toute fonction considérée est définie sur un intervalle ou une réunion d'intervalles deux à deux disjoints.

3.1 Tangente à une courbe

Interprétation géométrique du nombre dérivé [1]



$\mathcal{C}_f$ est la courbe d'une fonction f qui est dérivable au point a. A est le point de $\mathcal{C}_f$ de coordonnées $(a; f(a))$
Notons M le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $a+h$, $h \neq 0$.
Alors le taux de variation $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est le coefficient directeur de la sécante (AM).
Comme $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$, la droite T, qui passe par A et de coefficient directeur $f'(a)$, se conçoit comme "la position limite" des sécantes (AM) lorsque M se rapproche de A en restant sur la courbe. Cette droite T correspond alors à l'idéee intuitive que l'on se fait d'une tangente à une courbe. On pose alors la définition suivante :

Définition 2 *$\mathcal{C}_f$ est la courbe d'une fonction f qui est dérivable au point a.*
La **tangente à $\mathcal{C}_f$ au point** *$A(a; f(a))$ est la droite qui passe par A et dont le coefficient directeur est $f'(a)$.*

Propriété 1 *Une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $A(a; f(a))$ est :*

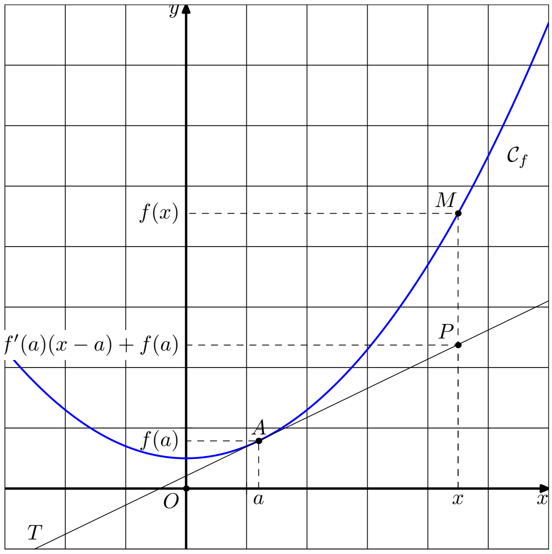
$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

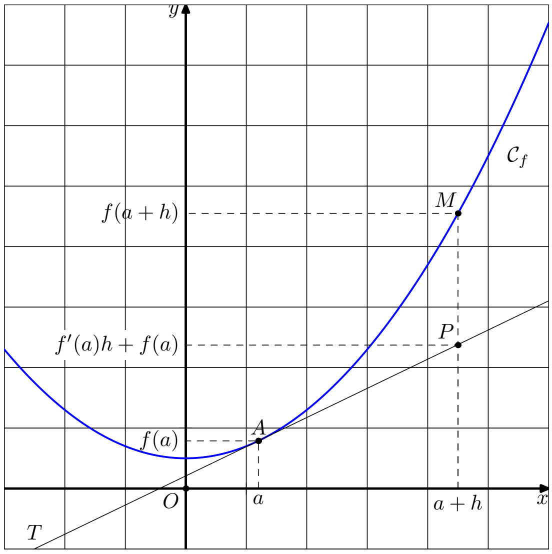
Preuve

En effet, cette tangente a pour coefficient directeur $f'(a)$, elle a donc une équation réduite qui s'écrit $y = f'(a)x+p$. Comme elle passe par A alors $f(a) = f'(a)a + p$ donc $p = f(a) - f'(a)a$, d'où le résultat.

Remarque : Cette tangente représente donc la fonction affine $x \longmapsto f'(a)(x-a) + f(a)$.

3.2 Approximation affine locale





$\mathcal{C}_f$ est la courbe d'une fonction f qui est dérivable au point a et T la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $A(a; f(a))$.
Comme la tangente "semble" proche de la courbe autour du point A, on pense à **remplacer $\mathcal{C}_f$ par T autour de** A.
Autrement dit, on **remplace localement la fonction f par la fonction affine représentée par** T, c'est-à-dire qu'on

[1] Le nombre dérivé a aussi une interprétation cinématique : il correspond, dans ce cadre, à la vitesse instantanée à l'instant a d'un mobile dont la loi horaire sur sa trajectoire serait donnée par f

remplace le réel $f(x)$ par le réel $f'(a)(x-a)+f(a)$ pour x voisin de a ou encore, en écrivant $x=a+h$, le réel $f(a+h)$ par le réel $f'(a)h+f(a)$ pour h voisin de 0. C'est en général cette dernière écriture que l'on retient.
Une autre droite passant par A fournirait une autre approximation affine mais on admettra que celle fournie par la tangente est la "meilleure" (notion à définir puis preuve à établir. . .) des approximations affines.
On dit alors que $f'(a)h+f(a)$ **est l'approximation affine locale de** $f(a+h)$.
Remarque : Ces approximations affines sont utiles pour simplifier les calculs (cf exos).
Ces approximations affines ne sont en fait qu'une petite partie d'une théorie mathématique qui consiste à remplacer localement les fonctions usuelles par des polynômes et à majorer l'erreur commise.

4 Fonctions dérivées des fonctions usuelles

4.1 Fonction dérivée

Définition 3 *f est une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}$ désigne un intervalle ou une réunion d'intervalles inclus dans $\mathcal{D}_f$. On dit que f est dérivable sur $\mathcal{D}$ si elle est dérivable en tout point de $\mathcal{D}$.*
Alors la fonction qui à tout x de $\mathcal{D}$ associe $f'(x)$, le nombre dérivé de f en x, est appelée la **fonction dérivée** *de f sur $\mathcal{D}$. On la note f'.*

Exemple : La fonction $f\ :x\longmapsto x^2$ est dérivable en tout point a de $\mathbb{R}$ et $f'(a)=2a$. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f'\ :x\longmapsto 2x$.
Remarque : La connaissance de f' permet un calcul rapide du nombre dérivé en un point particulier et, ainsi, d'éviter d'avoir recours à un calcul de limite en zéro d'un taux de variation.
Ainsi, la fonction f précédente qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ est donc dérivable en -8 et $f'(-8)=2\times(-8)=-16$.

4.2 Fonctions dérivées de quelques fonctions usuelles

Théorème 1 *Toute fonction affine $f\ :x\longmapsto mx+p$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est $f'\ :x\longmapsto m$.*

Preuve

$t(h)=\frac{m(a+h)+p-ma-p}{h}=m$. Donc $\lim_{h\to 0}t(h)=m$. Ceci est vrai pour tout a de $\mathbb{R}$ d'où le résultat.

Remarque : En particulier cette formule s'applique à la fonction identité dont la dérivée est $f'\ :x\longmapsto 1$ et à toute fonction constante dont la dérivée est la fonction nulle.

Théorème 2 *La fonction $f\ :x\longmapsto\sqrt{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et sa fonction dérivée est $f'\ :x\longmapsto\frac{1}{2\sqrt{x}}$.*

Preuve

Quel que soit $a>0$, $t(h)=\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}=\frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$.
Mais d'après les opérations sur les limites $\lim_{h\to 0}\sqrt{a+h}+\sqrt{a}=2\sqrt{a}$ donc $\lim_{h\to 0}t(h)=\frac{1}{2\sqrt{a}}$. Ceci est vrai pour tout $a>0$ d'où le résultat.

Remarque :

1. La fonction racine carrée (comme la fonction valeur absolue), bien que définie en zéro, n'est pas dérivable en zéro : cf manuel page 65. Cet exemple prouve que l'ensemble de dérivabilité n'est pas nécessairement égal à l'ensemble de définition.
2. Bien que la fonction racine carrée ne soit pas dérivable en zéro, sa courbe admet malgré tout une tangente au point d'abscisse 0 : cf manuel page 65.

Théorème 3 *(admis)*

1. *La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$, $sin'(x)=cosx$.*
2. *La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$, $cos'(x)=-sinx$.*

5 Opérations sur les fonctions dérivables

5.1 Dérivée d'une somme

Théorème 4 *u et v sont deux fonctions dérivables sur $\mathcal{D}$. Alors $u+v$ est une fonction dérivable sur $\mathcal{D}$ et :*

$$(u+v)' = u' + v'$$

Preuve

$t(h) = \frac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h} = \frac{u(a+h)+v(a+h)-u(a)-v(a)}{h}$ donc $t(h) = \frac{u(a+h)-u(a)}{h} + \frac{v(a+h)-v(a)}{h}$.
Posons $t_1(h) = \frac{u(a+h)-u(a)}{h}$ et $t_2(h) = \frac{v(a+h)-v(a)}{h}$. Comme u et v sont dérivables sur $\mathcal{D}$ alors en tout point a de $\mathcal{D}$, $\lim_{h\to 0} t_1(h) = u'(a)$ et $\lim_{h\to 0} t_2(h) = v'(a)$. Il en résulte par opérations sur les limites que $\lim_{h\to 0} t(h) = u'(a)+v'(a)$. Ceci est vrai pour tout a de $\mathcal{D}$ d'où le résultat.

5.2 Dérivée d'un produit

Théorème 5

1. *u et v sont deux fonctions dérivables sur $\mathcal{D}$. Alors uv est une fonction dérivable sur $\mathcal{D}$ et :*

$$(uv)' = u'v + uv'$$

2. *En particulier, si λ est un réel, $(\lambda v)' = \lambda v'$*

Preuve

1. $t(h) = \frac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h} = \frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a)}{h} = \frac{u(a+h)-u(a)}{h}v(a+h) + \frac{v(a+h)-v(a)}{h}u(a)$.
   Donc, avec les notations de la preuve précédente, $t(h) = t_1(h)v(a+h) + t_2(h)u(a)$.
   Il reste à étudier la limite de cette expression lorsque h tend vers zéro :
   Comme $t_2(h) = \frac{v(a+h)-v(a)}{h}$ alors $v(a+h) = ht_2(h) + v(a)$.
   Mais v est dérivable sur $\mathcal{D}$ alors [2] en tout point a de $\mathcal{D}$, $\lim_{h\to 0} v(a+h) = v(a)$
   Il en résulte, puisque u est aussi dérivable sur $\mathcal{D}$, qu'en tout point a de $\mathcal{D}$, $\lim_{h\to 0} t(h) = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$.
   Ceci est vrai pour tout a de $\mathcal{D}$ d'où le résultat.
2. Il suffit d'appliquer ce qui précède avec $u\ : x \longmapsto \lambda$.

5.3 Dérivée d'une fonction polynôme

Théorème 6 *(admis : cf manuel page 66)*

1. *Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la fonction $x \longmapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est $x \longmapsto nx^{n-1}$*
2. *Toute fonction polynôme $x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est $x \longmapsto \sum_{k=1}^{n} a_k x^{k-1}$*

5.4 Dérivée de l'inverse d'une fonction

Théorème 7 *v est une fonction dérivable sur $\mathcal{D}$ et pour tout réel a de $\mathcal{D}$, $v(a) \neq 0$. Alors $\frac{1}{v}$ est une fonction dérivable sur $\mathcal{D}$ et :*

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

Preuve

a est un point de $\mathcal{D}$. v est dérivable sur $\mathcal{D}$ donc (cf preuve précédente) $\lim_{h\to 0} v(a+h) = v(a)$.
Ainsi, les nombres $v(a+h)$ et $v(a)$ sont de plus en plus voisins lorsque h est de plus en plus voisin de zéro. Puisque $v(a) \neq 0$, les nombres $v(a+h)$ sont aussi non nuls pour des valeurs de h très voisines de zéro. Ainsi le taux de variation de $\frac{1}{v}$ entre $a+h$ et a est bien défini pour ces valeurs de h et :
$t(h) = \frac{1}{h}\left[\frac{1}{v(a+h)} - \frac{1}{v(a)}\right] = -\frac{1}{v(a+h)v(a)}\left[\frac{v(a+h)-v(a)}{h}\right]$.
Comme v est dérivable sur $\mathcal{D}$, pour tout point a de $\mathcal{D}$,

[2] même si cela peut paraître évident ce n'est pas vrai pout toutes les fonctions : cf manuel page 67

$\lim_{h \to 0} \frac{v(a+h)-v(a)}{h} = v'(a)$. Il en résulte que $\lim_{h \to 0} t(h) = -\frac{1}{v(a)v(a)} v'(a) = -\frac{v'(a)}{(v(a))^2}$. D'où le résultat puisque ceci est vrai pour tout point a de $\mathcal{D}$.

Théorème 8 *Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^n}$ est dérivable sur $\mathbb{R} - \{0\}$ et sa fonction dérivée est $x \longmapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$.*

Preuve

Quel que soit l'entier naturel $n \geqslant 1$, notons $f = \frac{1}{v}$ où $f : x \longmapsto x^n$. Il est clair que $v(x) = 0$ équivaut à $x = 0$ et f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (déjà vu) donc sur $\mathbb{R} - \{0\}$. Alors d'après le théorème précédent f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{0\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R} - \{0\}$,

$$f'(x) = -\frac{v'(x)}{(v(x))^2} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

ceci est vrai pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ d'où le résultat.

Remarque : Avec ce qui a déjà été dit on peut affirmer que la dérivée de $x \longmapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{Z}^*$ est toujours $x \longmapsto nx^{n-1}$ mais cette formule est valable seulement pour $x \neq 0$ lorsque $n < 0$.

5.5 Dérivée d'un quotient

Théorème 9 *u et v sont deux fonctions dérivables sur $\mathcal{D}$, et pour tout réel a de $\mathcal{D}$, $v(a) \neq 0$. Alors $\frac{u}{v}$ est une fonction dérivable sur $\mathcal{D}$ et :*

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Preuve

Il suffit d'écrire $\frac{u}{v} = u \times \frac{1}{v}$ et d'appliquer les théorèmes de dérivation de l'inverse d'une fonction et d'un produit.

5.6 Dérivée de $x \longmapsto u(ax+b)$

Théorème 10 *(admis) u est une fonction dérivable sur $\mathcal{D}$, a et b sont deux réels. J est l'ensemble des réels x tels que $ax+b$ soit dans $\mathcal{D}$. Alors la fonction $f : x \longmapsto u(ax+b)$ est dérivable sur J et pour tout réel x de J :*

$$f'(x) = au'(ax+b)$$

Remarque : Ce théorème est utile pour dériver la composée d'une fonction affine avec la fonction racine carrée ou la fonction cosinus ou la fonction sinus : cf manuel page 69.

5.7 Tableaux récapitulatifs

f est définie sur I $f(x) = \ldots$	f' est définie sur J $f'(x) = \ldots$
$I = \mathbb{R}$ $f(x) = mx + p$ Cas particuliers : $I = \mathbb{R}$ $f(x) = p$ $I = \mathbb{R}$ $f(x) = x$	$J = \mathbb{R}$ $f'(x) = m$ Cas particuliers : $J = \mathbb{R}$ $f'(x) = 0$ $J = \mathbb{R}$ $f'(x) = 1$
$I = \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$	$J = \mathbb{R}$ $f'(x) = 2x$
$I = [0; +\infty[$ $f(x) = \sqrt{x}$	$J =]0 + \infty[$ $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$I = \mathbb{R}$ $f(x) = x^3$	$J = \mathbb{R}$ $f'(x) = 3x^2$
$I = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ $f(x) = \frac{1}{x}$	$J = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$I = \mathbb{R}$ $f(x) = \|x\|$	$J = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ $f'(x) = \begin{cases} f'(x) = 1 \text{ si } x > 0 \\ f'(x) = -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$
$I = \mathbb{R}$ $f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{Z}^*\backslash\{1\}$	$J = \mathbb{R}$ $f'(x) = nx^{n-1}$
$I = \mathbb{R}$ $f(x) = \cos x$	$J = \mathbb{R}$ $f'(x) = -\sin x$
$I = \mathbb{R}$ $f(x) = \sin x$	$J = \mathbb{R}$ $f'(x) = \cos x$

Fonction	$u + v$	uv	ku (k constante)	$\frac{1}{v}$	$\frac{u}{v}$	$u(ax+b)$
Fonction dérivée	$u' + v'$	$u'v + uv'$	ku'	$\frac{-v'}{v^2}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$au'(ax+b)$