

# SYSTÈMES CENTRÉS DANS LES CONDITIONS DE GAUSS

## Table des matières

<b>1 Systèmes centrés focaux</b>	<b>2</b>
1.1 Foyer image – Plan focal image	2
1.2 Foyer objet – Plan focal objet	3
1.3 Principe du retour inverse de la lumière	4
<b>2 Le miroir sphérique</b>	<b>4</b>
2.1 Définition	4
2.2 Stigmatisme	5
2.2.1 Stigmatisme rigoureux : le centre et le sommet	5
2.2.2 Le sommet (et tous les points de la surface du miroir)	6
2.2.3 Stigmatisme approché	6
2.2.4 Schématisation des miroirs	8
2.3 Foyers	8
2.4 Grandissement	9
2.5 Approche graphique	9
2.5.1 Principe	9
2.5.2 Recherche graphique de l'image d'un objet	10
2.5.3 Tracé d'un rayon quelconque	10
2.6 Approche quantitative – Formules de conjugaison	11
2.6.1 Formule de Descartes avec origine au sommet	11
2.6.2 Formule de Newton avec origine au centre	13
2.6.3 Formule de Descartes avec origine au sommet	14
<b>3 Lentilles sphériques minces</b>	<b>14</b>
3.1 Définition	14
3.2 Propriétés	15
3.2.1 Rayon passant par $O$	15
3.2.2 Lentilles convergentes, divergentes – Schématisation	15
3.2.3 Foyers - Distances focales - Vergence	16
3.2.4 Grandissement – Cas d'un objet ou d'une image à l'infini	18
<b>4 Recherche d'images, d'objets – Construction de rayons</b>	<b>19</b>
4.1 Rayons particuliers	19
4.2 Recherche de l'image d'un objet	19
4.3 Construction de rayons quelconques	20
4.4 Relations de conjugaison et de grandissement	20
4.4.1 Relations de Descartes avec origine au centre	20
4.4.2 Relations de Newton avec origine aux foyers	21
4.5 Grandissement angulaire – Formule de Lagrange-Helmholtz	21
<b>5 Association de systèmes centrés</b>	<b>22</b>

Nous nous placerons désormais systématiquement dans les conditions de Gauss et considérerons donc les systèmes aplanétiques et stigmatiques (nous démontrerons d'ailleurs clairement dans le cas des miroirs sphériques que les conditions de Gauss entraînent le stigmatisme).

En outre nous considérerons principalement les caractéristiques de systèmes centrés focaux, c'est-à-dire admettant un axe de symétrie de révolution (*centrés*) et des foyers (*focaux*).

Un grand nombre de systèmes optiques sont l'association, outre de miroirs plans, de miroirs sphériques et de lentilles. L'idée ici, pour les miroirs et les lentilles, est de savoir trouver l'image d'un objet donné, ou de retrouver l'objet dont l'image est donnée, d'une part graphiquement, et d'autre part par le calcul (avec des formules dites de *conjugaison*).

Notons en outre que quand on parlera d'objet et d'image par la suite, on sous-entendra objet ponctuel et image ponctuelle (sauf évidemment si on parle par exemple d'un objet  $AB$ ).

Dans le même ordre d'idée, sauf si le contraire est indiqué, la lumière (et donc l'axe optique) est toujours supposée orientée de la gauche vers la droite.

## 1 Systèmes centrés focaux

### 1.1 Foyer image – Plan focal image

#### Foyer image

Un système admet un foyer image si l'image d'un point à l'infini sur l'axe optique est à distance finie (et évidemment, sur l'axe optique). Ce point est alors appelé *foyer image*, et généralement noté  $F'$  (voir FIG. 1).

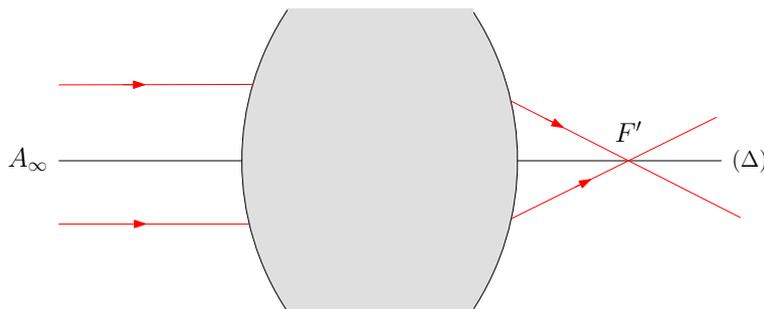


FIG. 1 : Foyer image (ici réel) d'un système centré

Une manière de schématiser cela est :

$$A_{\infty} \xrightarrow{\text{système optique}} F'$$

Le foyer image peut être réel ou virtuel.

**Remarque :** comme on l'a déjà remarqué, le système optique "ne sait pas" d'où viennent les rayons lumineux (seul leur angle d'incidence compte) ; autrement dit, une autre façon de voir le foyer image est de dire : des rayons lumineux arrivant parallèles à l'axe émergent en se croisant au foyer image.

#### Plan focal image

Soit maintenant un objet  $B_{\infty}$  à l'infini hors de l'axe (donc dans un plan perpendiculaire à l'axe optique contenant un point  $A_{\infty}$  à l'infini sur l'axe). L'aplanétisme du système nous permet de dire que son image  $B'$  sera dans le plan perpendiculaire à l'axe contenant  $F'$ . Ce plan est appelé *plan focal image* (voir FIG. 2).

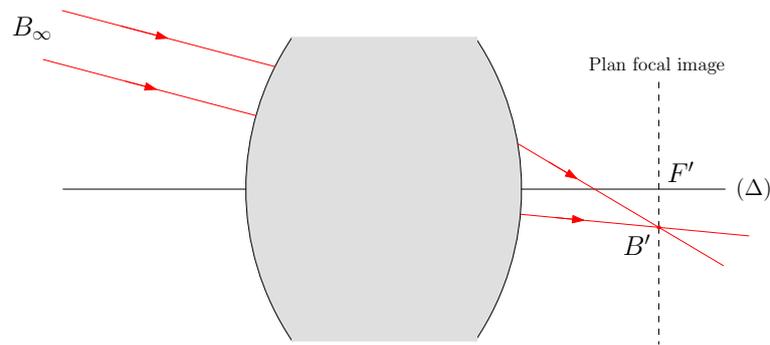


FIG. 2 : Plan focal image

Comme précédemment on peut faire une approche orientée “rayons lumineux” en disant que des rayons émergents provenant de rayons incidents parallèles entre eux se croisent dans le plan focal image.

## 1.2 Foyer objet – Plan focal objet

### Foyer image

Un système admet un foyer objet si l’objet dont l’image est à l’infini sur l’axe optique est à distance finie (et évidemment, sur l’axe optique). Ce point est alors appelé *foyer objet*, et généralement noté  $F$  (voir FIG. 3).

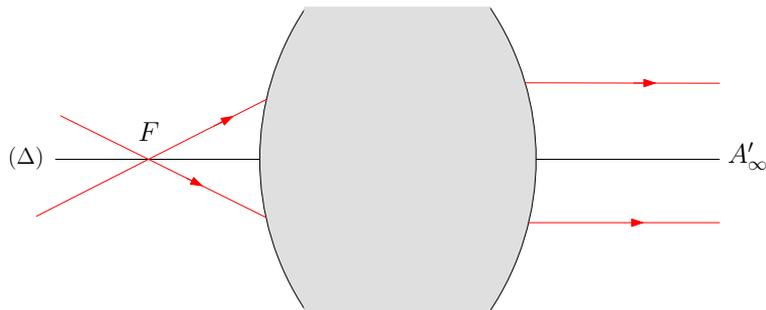


FIG. 3 : Foyer objet (ici réel) d’un système centré

Un manière de schématiser cela est :

$$F \xrightarrow{\text{système optique}} A'_\infty$$

Le foyer objet peut être réel ou virtuel.

Comme précédemment on peut dire que des rayons émergents parallèles à l’axe optique proviennent de rayons incidents qui se croisent en  $F$ .

### Plan focal objet

Soit maintenant une image  $B'_\infty$  à l’infini hors de l’axe (donc dans un plan perpendiculaire à l’axe optique contenant un point  $A'_\infty$  à l’infini sur l’axe). L’aplanétisme du système nous permet de dire que l’objet correspondant  $B$  sera dans le plan perpendiculaire à l’axe contenant  $F$ . Ce plan est appelé *plan focal objet* (voir FIG. 4).

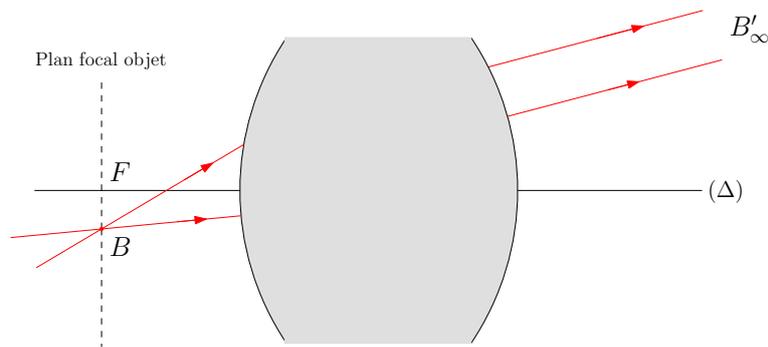


FIG. 4 : Plan focal objet

Comme précédemment on peut faire une approche orientée “rayons lumineux” en disant que si des rayons incidents se croisent dans le plan focal objet, ils émergeront du système parallèles entre eux.

### 1.3 Principe du retour inverse de la lumière

Ce principe, lié à l'invariance des lois de la physique par renversement du temps, dit que *le trajet suivi par la lumière entre deux points ne dépend pas du sens de propagation de la lumière.*

Si on met une source ponctuelle en un point  $A$  et que le système est stigmatique, un système optique en donnera une image ponctuelle  $A'$ .

Le principe du retour inverse de la lumière entraîne le fait que si je met maintenant une source ponctuelle en  $A'$ , son image sera en  $A$ .

**Remarque :** attention, la dernière propriété est vérifiée si le système est stigmatique. Si l'image de  $A$  est une tache en  $A'$ , l'image de la tache ne sera évidemment pas ponctuelle en  $A$ .

## 2 Le miroir sphérique

### 2.1 Définition

Il s'agit d'une portion de sphère dont la partie interne ou externe est réfléchissante. Il est caractérisé par son centre  $C$ , et son sommet ( $S$ , intersection du miroir avec l'axe optique).

On définit le rayon d'un miroir sphérique algébriquement par

$$R = \overline{SC}$$

Dans le cas où c'est la partie interne qui réfléchit la lumière, on dit que le miroir est *concave* (voir FIG. 5). Dans ce cas on a  $R < 0$ .

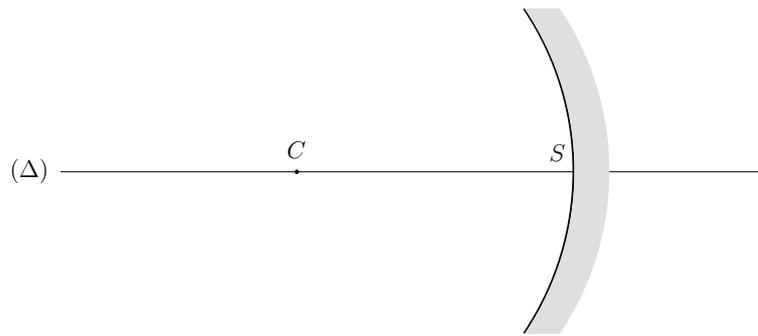


FIG. 5 : Miroir sphérique concave. On a  $R = \overline{SC} < 0$ .

Dans le cas où c'est la partie externe qui réfléchit la lumière, on dit que le miroir est *convexe* (voir FIG. 6). Dans ce cas on a  $R > 0$ .

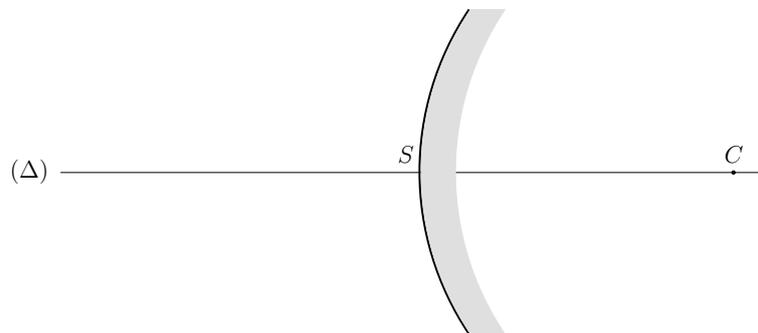


FIG. 6 : Miroir sphérique convexe. On a  $R = \overline{SC} > 0$ .

## 2.2 Stigmatisme

Notons tout de suite que les exemples, démonstrations, ... suivants seront fait en choisissant soit un miroir concave soit un convexe, mais l'utilisation des mesures algébriques permettra de généraliser l'ensemble des résultats suivants à tout type de miroir sphérique.

### 2.2.1 Stigmatisme rigoureux : le centre et le sommet

#### Le centre

L'application rigoureuse des lois de Snell-Descartes à un rayon lumineux incident passant par le centre (c'est donc un rayon de la sphère) permet de dire qu'il repart par le même chemin. Tous les rayons émergents provenant de  $C$  de coupent donc en  $C$  (voir FIG. 7 et FIG. 8). On en déduit que  $C$  est sa propre image pour le miroir ( $C$  est conjugué avec lui-même) :

$$C \xrightarrow[\text{sphérique}]{\text{miroir}} C$$

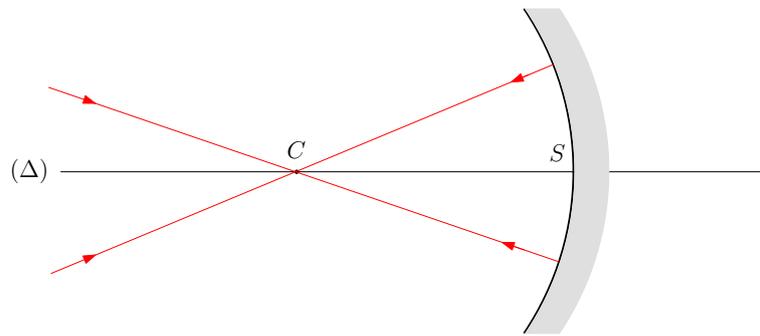


FIG. 7 : Rayons lumineux passant par le centre d'un miroir concave.

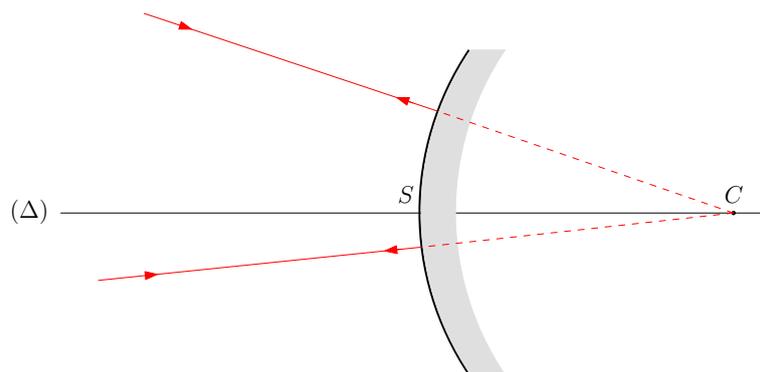


FIG. 8 : Rayons lumineux passant par le centre d'un miroir convexe.

### 2.2.2 Le sommet (et tous les points de la surface du miroir)

En vertu des lois de Snell-Descartes, tout rayon frappant le miroir en un point  $I$  repart symétriquement à la normale. Donc tous les rayons émergents sont concourants au point  $I$ . En d'autres termes l'image de tout point à la surface du miroir est lui-même.

C'est vrai en particulier pour le sommet  $S$  : tout rayon incident frappant le miroir en  $S$  repart symétriquement à l'axe optique (voir FIG. 9).

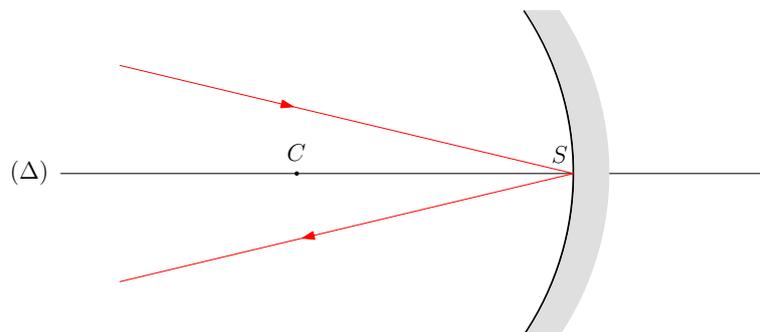


FIG. 9 : Rayons lumineux passant par le sommet d'un miroir concave.

### 2.2.3 Stigmatisme approché

Hormis pour le centre et tous les points du miroir, nous allons voir qu'il n'y a jamais stigmatisme rigoureux.

Prenons un point  $A$  sur l'axe. Un rayon quelconque venant de ce point frappe le miroir en un point  $I$  (dont le projeté orthogonal sur l'axe est  $H$ ) et repart symétriquement à la normale au miroir en

$I$  (qui passe évidemment par  $C$ ) pour couper l'axe optique en  $A'$ , "image" de  $A$ . On utilisera les notations de la FIG. 10.

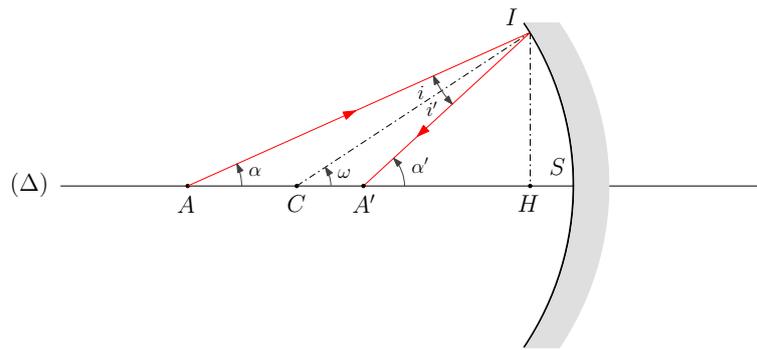


FIG. 10 : Stigmatisme approché pour un point quelconque de l'axe optique.

Il est absolument évident en regardant la figure que la position du point  $A'$  dépend du rayon choisi : autrement dit, il n'y a pas stigmatisme rigoureux.

Montrons que dans les conditions de Gauss, on peut considérer qu'il y a stigmatisme.

Les conditions de Gauss (rayons peu inclinés sur l'axe et entrant dans le système proches de l'axe) se traduisent ici par les hypothèses suivantes :

- Les angles étant petits  $\tan \alpha \simeq \alpha$ ,  $\tan \alpha' \simeq \alpha'$ ,  $\tan \omega \simeq \omega$ .
- Le point  $H$  est pratiquement confondu avec  $S$  :  $H \simeq S$ .

Le fait que la somme des angles d'un triangle soit égale à  $\pi$  appliqué dans les triangles  $(AIC)$  et  $(A'IC)$  donne :

$$(1) \quad \alpha - i + \pi - \omega = \pi$$

$$(2) \quad \pi - \alpha' + i' + \omega = \pi$$

En outre les lois de Descartes pour la réflexions entraînent la relation  $i + i' = 0$ .

On en déduit immédiatement en faisant (1)-(2), que :

$$(3) \quad \alpha + \alpha' = 2\omega$$

Maintenant, les triangles  $(AIH)$ ,  $(CIH)$  et  $(A'IH)$  étant rectangles, on en déduit :

$$(4) \quad \tan \alpha \simeq \alpha = \frac{\overline{HI}}{\overline{AH}}$$

$$(5) \quad \tan \omega \simeq \omega = \frac{\overline{HI}}{\overline{CH}}$$

$$(6) \quad \tan \alpha' \simeq \alpha' = \frac{\overline{HI}}{\overline{A'H}}$$

En remplaçant (4), (5) et (6) dans la relation (3), en remplaçant  $H$  par  $S$  (approximation de Gauss) et en simplifiant par  $\overline{HI}$ , il vient :

$$(7) \quad \frac{1}{SA} + \frac{1}{SA'} = \frac{2}{SC}$$

On voit que (7) est une relation qui ne fait intervenir que  $A$  et  $A'$  (et les caractéristiques du miroir  $S$  et  $C$ ). Cette relation traduit donc le stigmatisme approché du aux conditions de Gauss : pour un point  $A$  on a un point  $A'$  unique et inversement. La relation (7) (que nous démontreront géométriquement plus tard) est une formule de conjugaison.

### 2.2.4 Schématisation des miroirs

À partir de maintenant on se placera dans les conditions de Gauss systématiquement. Donc, on aura plus besoin d'appliquer les lois de Snell-Descartes. En conséquence, ce n'est plus la peine de faire des schémas en dessinant de vrais arcs de cercles, on peut schématiser les miroirs sphériques. Les figures 11 et 12 montrent les schémas que nous utiliserons désormais.

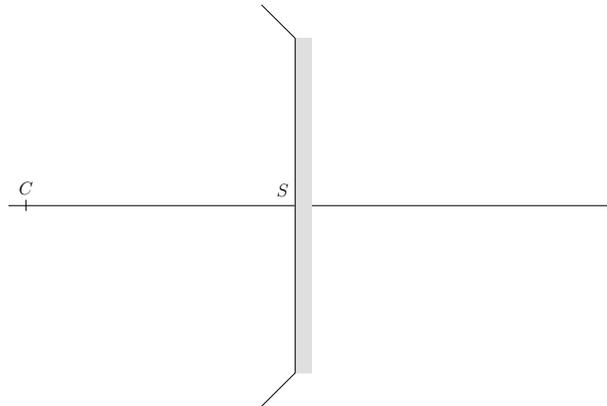


FIG. 11 : Schématisation d'un miroir concave.

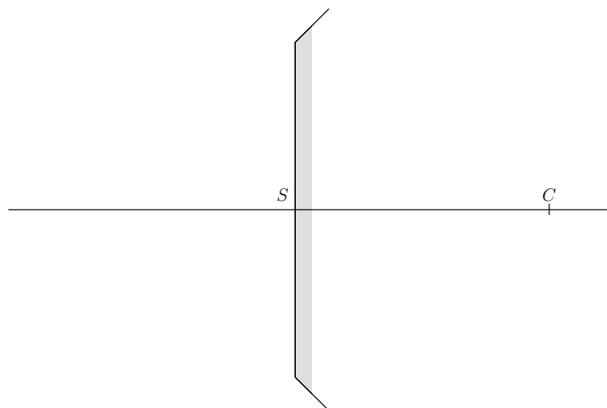


FIG. 12 : Schématisation d'un miroir convexe.

## 2.3 Foyers

Le miroir sphérique est-il un système focal ?

Pour le savoir cherchons d'éventuels foyers en utilisant la formule de conjugaison (7) précédente.

### Foyer objet

Soit  $A'$  une image à l'infini sur l'axe. On a alors  $\frac{1}{SA'} = 0$  et donc, d'après (7) :

$$\overline{SF} = \frac{\overline{SC}}{2}$$

Le foyer objet se trouve au milieu du segment  $[SC]$ .

## Foyer image

Soit  $A$  un objet à l'infini sur l'axe. On a alors  $\frac{1}{SA} = 0$  et donc, d'après (7) :

$$\overline{SF'} = \frac{\overline{SC}}{2}$$

Le foyer objet se trouve au milieu du segment  $[SC]$ .

## Distances focales – Vergence

On appelle :

- Distance focale objet la grandeur notée  $f$  et définie par  $f = \overline{SF}$  ( $f$  est exprimée en m).
- Distance focale image la grandeur notée  $f'$  et définie par  $f' = \overline{SF'}$  ( $f'$  est exprimée en m).
- Vergence la grandeur notée  $V$  et définie par  $V = \frac{1}{f'}$  ( $V$  est exprimée en  $m^{-1}$ , ou plus généralement en dioptries :  $1 \delta = 1 m^{-1}$ ).

Évidemment dans le cas du miroir sphérique  $f = f'$ .

## 2.4 Grandissement

Soient un objet  $AB$  perpendiculaire à l'axe et optique et  $A'B'$  son image ; on appelle grandissement la grandeur algébrique  $\gamma$  définie par

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

**Remarque :** En pratique lorsque l'objet  $AB$  ou l'image  $A'B'$  est à l'infini, on utilise plutôt la notion de rayon ou diamètre apparent  $\alpha$  (voir FIG. 13). On ne parle pas alors de grandissement mais on utilise le rapport  $\frac{\overline{A'B'}}{\alpha}$  (si c'est l'objet qui est à l'infini).

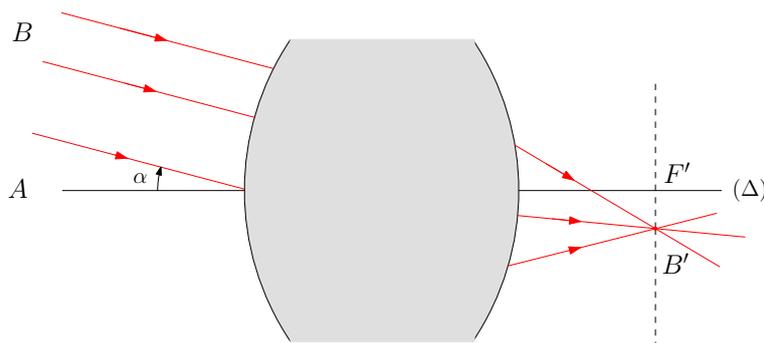


FIG. 13 :  $\alpha$  est le rayon apparent de  $AB$ .

## 2.5 Approche graphique

### 2.5.1 Principe

Soit un objet  $AB$  ( $A$  sur l'axe) perpendiculaire à l'axe optique, dont on cherche l'image  $A'B'$ . Il suffit de trouver  $B'$ ,  $A'$  étant alors le projeté orthogonal de  $B'$  sur l'axe. Pour trouver  $B'$ , il suffit de tracer deux rayons incidents venant de  $B$  et de chercher le point d'intersection des rayons émergents. Par souci de simplicité, on choisira des rayons particuliers parmi les suivants :

- Le rayon venant de  $B$  parallèle à l'axe optique : il ressort en passant par  $F'$ .
- Le rayon venant de  $B$  passant par  $F$  : il ressort parallèle à l'axe.
- Le rayon venant de  $B$  passant par  $C$  : il ressort en passant à nouveau par  $C$ .
- Le rayon venant de  $B$  passant par  $S$  : il ressort symétrique par rapport à l'axe optique.

### 2.5.2 Recherche graphique de l'image d'un objet

Il suffit en pratique pour trouver l'image d'un objet  $AB$  par un miroir sphérique (ou tout autre système optique stigmatique), de tracer 2 rayons particuliers provenant de  $B$ . L'intersection des deux rayons émergents donne  $B'$ . L'aplanétisme permet de dire que  $A'$  est le projeté orthogonal de  $B'$  sur l'axe optique.

Les figures 14 et 15 montrent deux exemples.

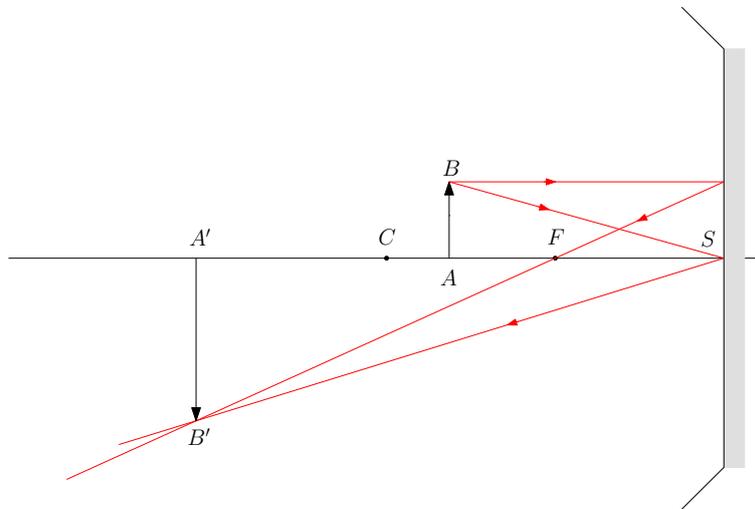


FIG. 14 : Image d'un objet réel par un miroir concave. Ici l'image est réelle et  $\gamma < -1$ .

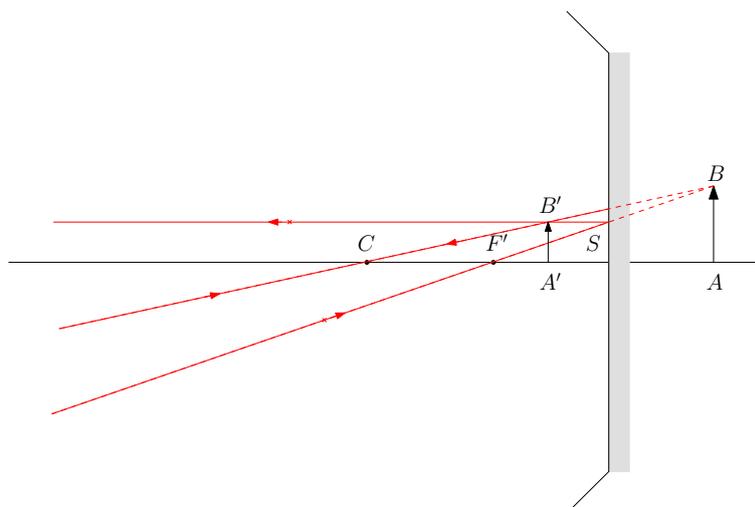


FIG. 15 : Image d'un objet virtuel par un miroir concave. Ici l'image est réelle et  $0 < \gamma < 1$ .

### 2.5.3 Tracé d'un rayon quelconque

On cherche maintenant à connaître le trajet d'un rayon venant d'un rayon incident quelconque (le rayon (1) de la figure 16 par exemple). On utilise pour cela le fait que si deux rayons incidents

sont parallèles, les rayons émergents correspondants se croisent dans le plan focal image. On trace donc un rayon auxiliaire (2) parallèle à (1), en le choisissant lui, non quelconque : dans l'exemple de la figure, (2) est le rayon parallèle à (1) passant par  $C$ . Le rayon émergent correspondant à (2) est lui-même, de sorte que l'on trouve immédiatement son intersection avec le plan focal image. Il ne reste alors plus qu'à tracer (1'), l'émergent correspondant à (1), qui doit également passer par ce point d'intersection.

Remarquons que l'on pourrait également choisir pour (2) le rayon parallèle à (1) passant par  $F$  ou passant par  $S$ .

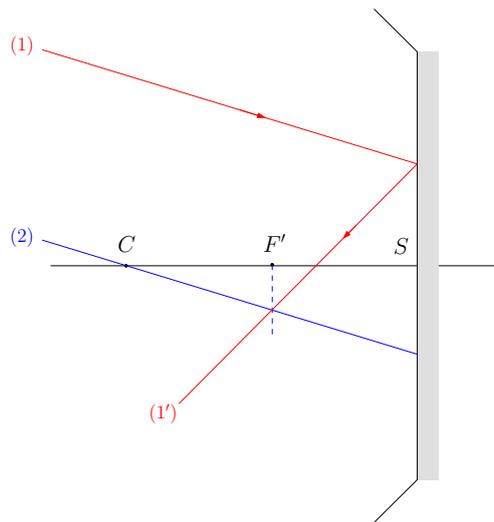


FIG. 16 : Exemple de construction de l'image d'un rayon incident quelconque.

## 2.6 Approche quantitative – Formules de conjugaison

Si un objet  $AB$  est donné et que nous désirons connaître son image  $A'B'$ , il suffit de connaître la position de  $A$  sur l'axe (première formule de conjugaison) et la taille de l'image (deuxième formule de conjugaison).

### 2.6.1 Formule de Descartes avec origine au sommet

#### Conjugaison

Avec les notations de la figure 17, on a (en appliquant deux fois le théorème de Thalès) :

$$\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB''}}$$

$$\frac{\overline{FA'}}{\overline{FS}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{SI}}$$

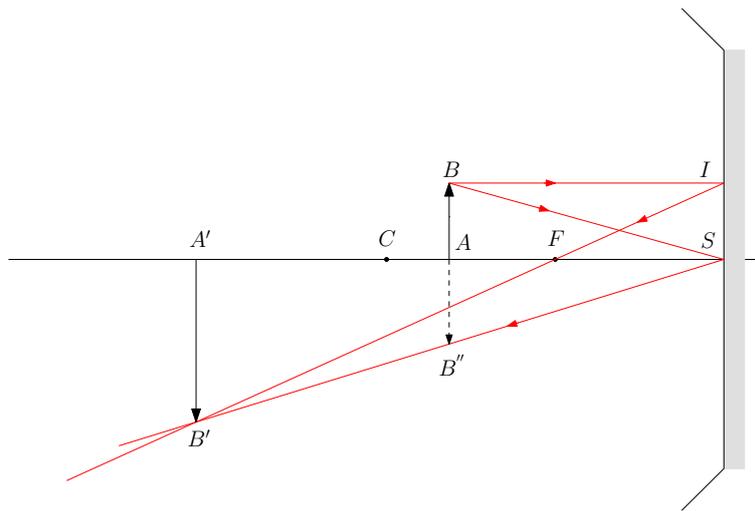


FIG. 17 : Construction permettant de démontrer les formules de conjugaison avec origine au sommet.

Or évidemment  $\overline{AB''} = -\overline{AB}$  et  $\overline{SI} = \overline{AB}$  d'où rapidement

$$\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = -\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

$$\frac{\overline{FA'}}{\overline{FS}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

On en déduit :

$$\frac{\overline{FA'}}{\overline{FS}} = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{FS} + \overline{SA'}}{\overline{FS}} = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{\overline{SA'}}{\overline{FS}} = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{FS}} = -\frac{1}{\overline{SA}}$$

Ce qui est la formule de conjugaison avec origine au sommet dite *formule de Descartes* (que nous avons obtenue différemment tout à l'heure) écrite généralement sous la forme :

$$\frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{1}{f'}$$

### Grandissement

On vient à l'instant de démontrer

$$(8) \quad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$$

On en déduit la relation donnant le grandissement :

$$\gamma = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$$

### 2.6.2 Formule de Newton avec origine au centre

#### Conjugaison

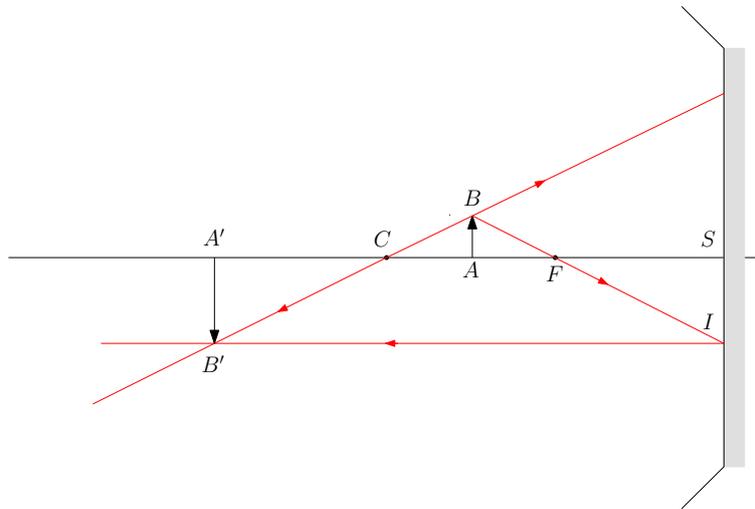


FIG. 18 : Construction permettant de démontrer les formules de conjugaison avec origine au centre.

L'application du théorème de Thalès donne :

$$(9) \quad \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

donc d'après l'équation (8) :

$$\begin{aligned} \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} &= -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} \\ &= -\frac{\overline{SC} + \overline{CA'}}{\overline{SC} + \overline{CA}} \\ \text{donc } \overline{CA'}(\overline{SC} + \overline{CA}) &= -\overline{CA}(\overline{SC} + \overline{CA'}) \\ \overline{CA} \cdot \overline{CS} + \overline{CA'} \cdot \overline{CS} &= 2\overline{CA} \cdot \overline{CA'} \end{aligned}$$

On divise cette relation par  $\overline{CA} \cdot \overline{CA'} \cdot \overline{CS}$  et on en déduit la formule de Newton :

$$\frac{1}{\overline{CA'}} + \frac{1}{\overline{CA}} = \frac{2}{\overline{CS}}$$

#### Grandissement

D'après l'équation (9) on a immédiatement :

$$\gamma = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}$$

### 2.6.3 Formule de Descartes avec origine au sommet

#### Conjugaison

D'après la figure 18 on a :

$$(10) \quad \frac{\overline{FS}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{SI}}{\overline{AB}}$$

$$(11) \quad = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

On on a démontré précédemment que :

$$\frac{\overline{FA'}}{\overline{FS}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

On en déduit :

$$\frac{\overline{FS}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{FA'}}{\overline{FS}}$$

que l'on écrit généralement sous la forme :

$$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = f'^2$$

#### Grandissement

On vient de le démontrer :

$$\gamma = \frac{\overline{FA'}}{\overline{FS}} = \frac{\overline{FS}}{\overline{FA}}$$

## 3 Lentilles sphériques minces

### 3.1 Définition

Une lentille sphérique est l'association de deux dioptries sphériques coaxiaux (centres  $C_1$ ,  $C_2$ , sommets  $S_1$ ,  $S_2$ ) délimitant une portion de matériau d'indice de réfraction  $n$  (voir FIG. 19).

Ce système n'est pas rigoureusement stigmatique et donc la recherche de l'image d'un objet demanderait l'application des lois de Snell-Descartes pour tous les rayons incidents venant de l'objet.

Par la suite on fera les deux approximations suivantes :

- on se placera dans les conditions de Gauss afin de considérer les lentilles comme stigmatiques et aplanétiques.
- on supposera les lentilles minces, c'est à dire que si la distance  $|S_1 S_2|$  est faible devant les rayons des dioptries, alors  $S_1 \simeq S_2 = O$ .  
 $O$  est appelé centre optique de la lentille.

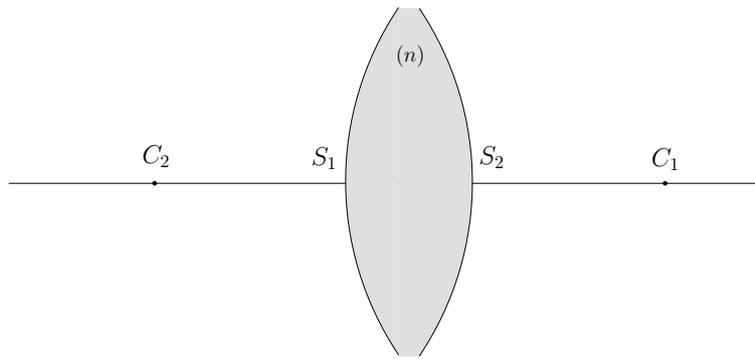


FIG. 19 : Lentille sphérique.

## 3.2 Propriétés

### 3.2.1 Rayon passant par $O$

Au voisinage de l'axe optique, la lentille peut être considérée comme une portion de lame à faces parallèles. De sorte qu'un rayon lumineux incident arrivant au voisinage de l'axe optique ressort parallèle à la direction initiale, et légèrement décalé.

La figure 20 illustre cette propriété. On voit sur cette figure que si on fait maintenant l'approximation des lentilles minces en faisant tendre  $S_1$  et  $S_2$  vers  $O$ , alors on arrive à une propriété très importante des lentilles minces :

Un rayon incident arrivant en  $O$ , centre optique d'une lentille mince, n'est pas dévié.

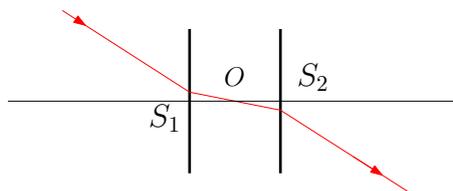


FIG. 20 : Rayon incident arrivant au voisinage de l'axe optique sur une lentille.

### 3.2.2 Lentilles convergentes, divergentes – Schématisation

Suivant l'orientation des dioptrés sphériques, les lentilles sont soit convergentes (elles rapprochent les rayons de l'axe optique) soit divergentes (elles éloignent les rayons de l'axe optiques).

Les figures 21 et 22 montre les différents types de lentilles réelles suivant l'agencement des dioptrés sphériques (notons qu'un dioptré plan est ici considéré comme sphérique de rayon infini).

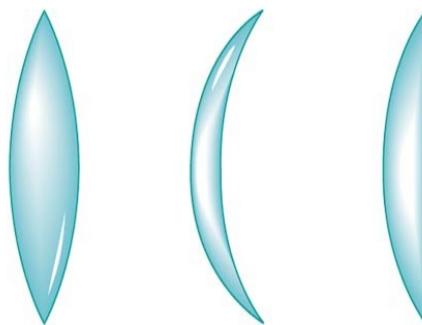


FIG. 21 : Lentilles convergentes.

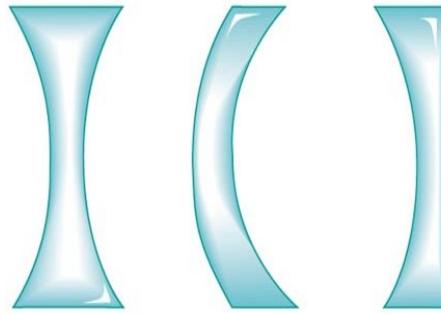
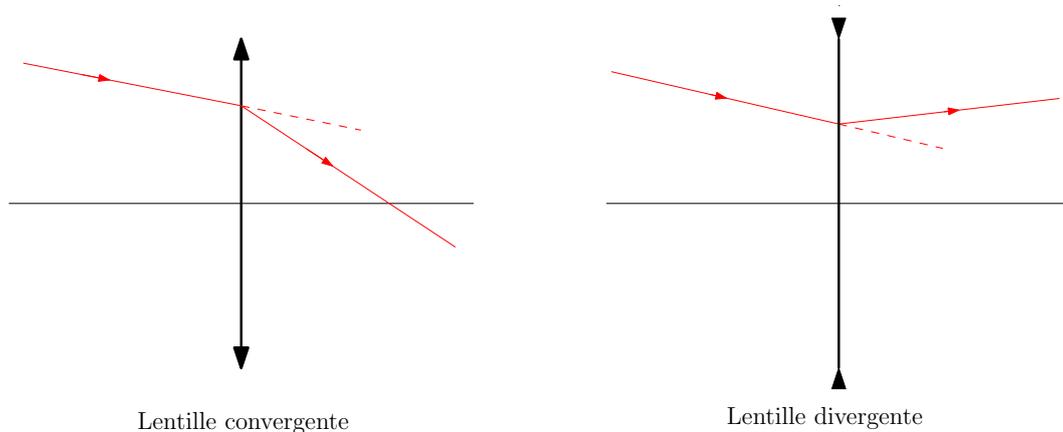


FIG. 22 : *Lentilles divergentes.*

On schématise les lentilles minces de la façon suivante :



Lentille convergente

Lentille divergente

FIG. 23 : *Schématisation des lentilles minces.*

### 3.2.3 Foyers - Distances focales - Vergence

#### Foyers

Les lentilles sont des systèmes focaux. Les figures 24, 25, 26 et 27 montrent les foyers objet et image des lentilles convergentes et divergentes.

Les plans focaux objet et image sont les plans perpendiculaires à l'axe optique et contenant respectivement  $F$  et  $F'$ .

Remarquons que :

- Le foyer objet et le foyer image d'une lentille convergente sont réels.
- Le foyer objet et le foyer image d'une lentille divergente sont virtuels.
- D'après le principe du retour inverse de la lumière, les foyers objet et image sont symétriques par rapport au centre optique :  $\overline{OF} = -\overline{OF'}$

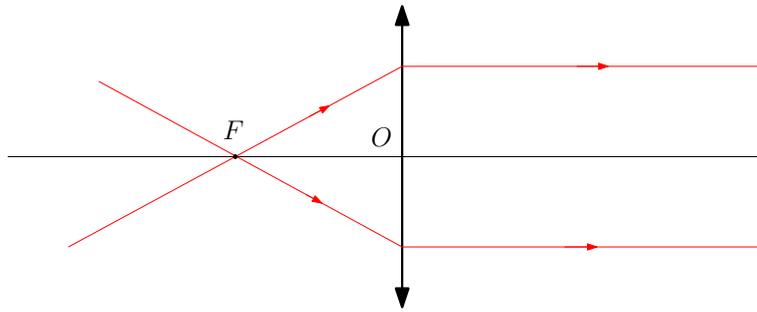


FIG. 24 : Foyer objet d'une lentille convergente.

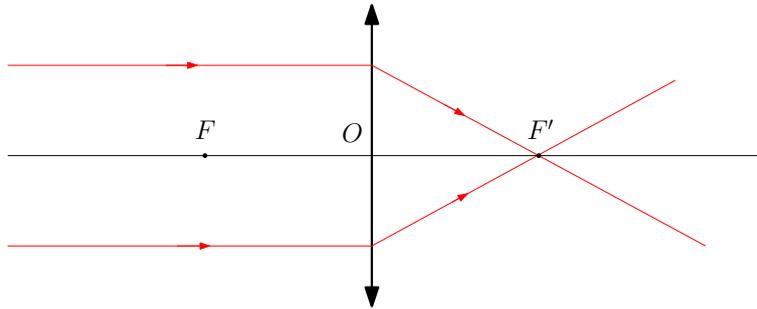


FIG. 25 : Foyer image d'une lentille convergente.

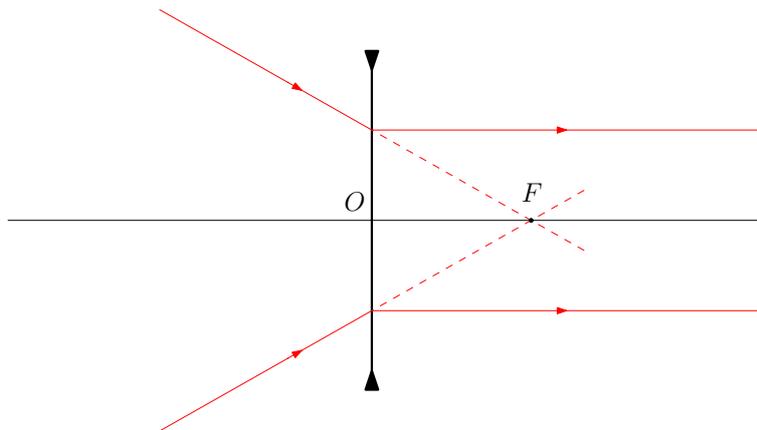


FIG. 26 : Foyer objet d'une lentille divergente.

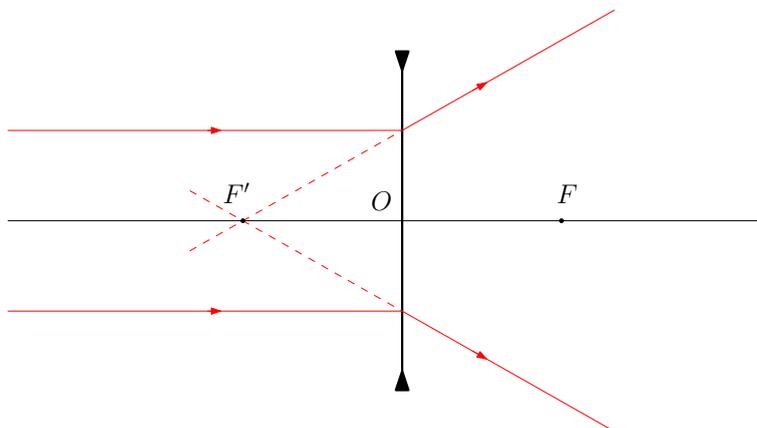


FIG. 27 : Foyer image d'une lentille divergente.

### Distances focales, vergence

On appelle :

- Distance focale objet la grandeur notée  $f$  et définie par  $f = \overline{OF}$
- Distance focale image la grandeur notée  $f'$  et définie par  $f' = \overline{OF'}$
- Vergence la grandeur notée  $V$  et définie par  $V = \frac{1}{f'}$

On a les propriétés suivantes :

- $f = -f'$
- Pour une lentille convergente :  $f < 0$ ,  $f' > 0$  et  $V > 0$
- Pour une lentille divergente :  $f > 0$ ,  $f' < 0$  et  $V < 0$

Une lentille est donc complètement caractérisée par l'une des grandeurs précédentes (généralement, on donne sa distance focale image, parfois appelée simplement *focale*).

### 3.2.4 Grandissement – Cas d'un objet ou d'une image à l'infini

#### Grandissement transversal

Si  $A'B'$  est l'image d'un objet  $AB$  perpendiculaire à l'axe optique, on appelle grandissement transversal la grandeur :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

#### Cas d'un objet ou d'une image à l'infini

Dans le cas où l'objet ou l'image est à l'infini, on définit sa taille en utilisant plutôt le rayon ou diamètre apparent (voir FIG. 28).

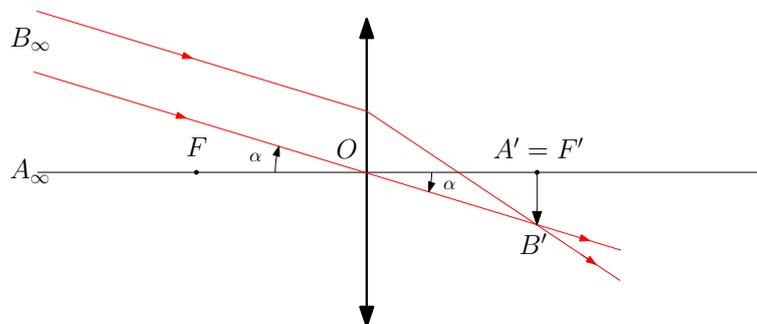


FIG. 28 : Image d'un objet à l'infini.

La figure montre le cas où l'objet  $AB$  est à l'infini. Son image est alors évidemment dans le plan focal image ( $A' = F'$ ). On voit que l'on a :

$$\begin{aligned} \tan \alpha &\approx \alpha \\ &= \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OF'}} \end{aligned}$$

soit finalement la relation :

$$\alpha = \frac{\overline{A'B'}}{f'}$$

On montre de la même manière que dans le cas où c'est l'image qui est à l'infini, vue sous un angle  $\alpha'$ , alors on a :

$$\alpha' = \frac{\overline{AB}}{f}$$

## 4 Recherche d'images, d'objets – Construction de rayons

### 4.1 Rayons particuliers

Il y a trois rayons particuliers que l'on peut utiliser lors des différents tracés :

- Un rayon parallèle à l'axe optique : il ressort en passant par  $F'$ .
- Un rayon passant par  $F$  : il ressort parallèle à l'axe.
- Un rayon passant par  $O$  : il n'est pas dévié.

### 4.2 Recherche de l'image d'un objet

Soit un objet  $AB$  perpendiculaire à l'axe, dont on cherche à construire l'image  $A'B'$  par une lentille. Il suffit de tracer 2 rayons venant de  $B$  ; l'intersection des rayons émergents correspondant donne  $B'$ .  $A'$  est alors le projeté orthogonal de  $B'$  sur l'axe.

Les figures 29 et 30 montrent deux exemples.

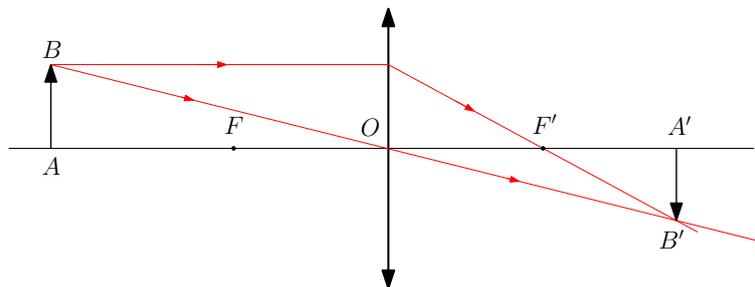


FIG. 29 : Image réelle d'un objet réel  $AB$  par une lentille convergente. Dans ce cas on voit que  $\gamma < -1$ .

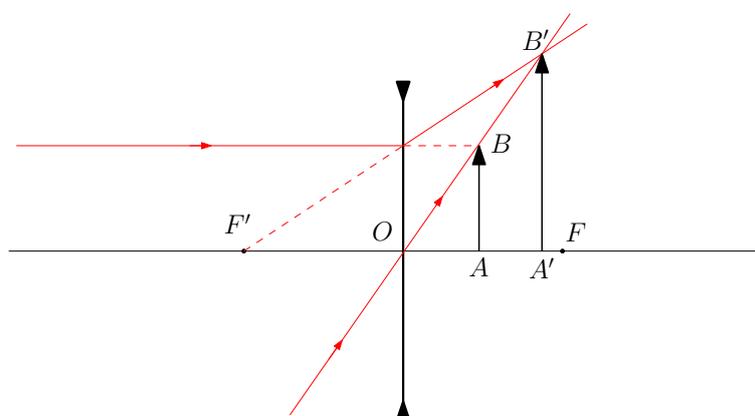


FIG. 30 : Image réelle d'un objet virtuel  $AB$  par une lentille divergente. Dans ce cas on voit que  $\gamma > 1$ .

**Remarque :** Pour construire l'objet  $AB$  dont l'image  $A'B'$  est donnée, le raisonnement est évidemment le même : on trace deux rayons émergents particuliers contenant  $B'$  ; l'intersection des rayons incidents correspondants donne  $B$ .

### 4.3 Construction de rayons quelconques

Le méthode est exactement la même que pour les miroirs sphériques, et illustrée sur la figure 31 : on utilise le fait que deux rayons incidents parallèles voient leurs rayons émergents correspondants se croiser dans le plan focal image.

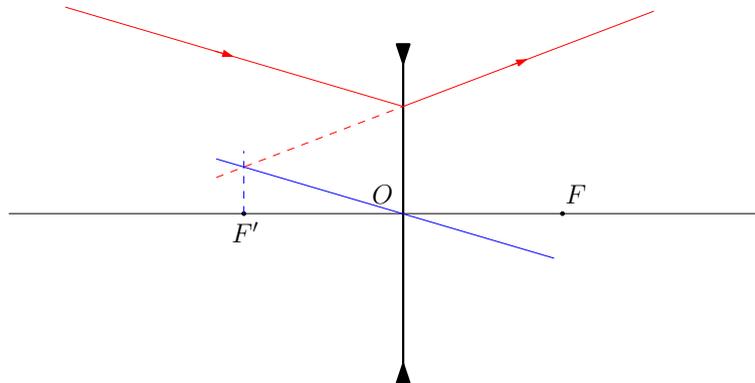


FIG. 31 : Tracé du rayon émergent correspondant à un rayon incident quelconque sur une lentille divergente.

### 4.4 Relations de conjugaison et de grandissement

Pour cette partie, on fera les démonstrations en utilisant la figure 32. La démonstration et les résultats restent valables quelque soit le type de lentille.

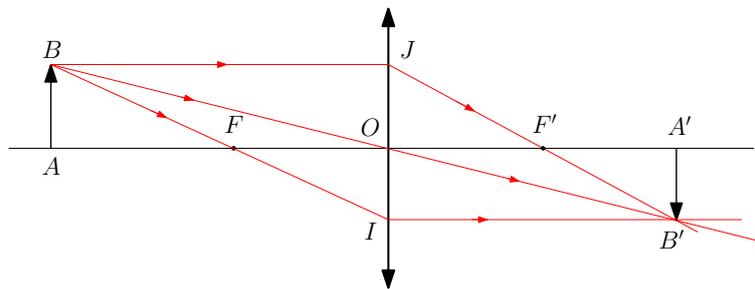


FIG. 32 : Construction utilisée pour la démonstration des relations de conjugaison.

#### 4.4.1 Relations de Descartes avec origine au centre

L'application du théorème de Thalès aux triangles  $(OAB)$  et  $(OA'B')$  donne :

$$(12) \quad \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

On a donc une formule de grandissement avec origine au centre :

$$\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

Appliquons le théorème de Thalès dans les triangles  $(F'OJ)$  et  $(F'A'B')$  :

$$(13) \quad \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OJ}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

Les équations (12) et 13 impliquent :

$$\begin{aligned}\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} &= \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} \\ &= \frac{\overline{F'O} + \overline{OA'}}{\overline{F'O}} \\ &= 1 + \frac{\overline{OA'}}{\overline{F'O}}\end{aligned}$$

En divisant la dernière égalité par  $\overline{OA'}$ , on en déduit la relation de Descartes avec origine au centre :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

#### 4.4.2 Relations de Newton avec origine aux foyers

L'application du théorème de Thalès dans les triangles  $(FAB)$  et  $(FOI)$  donne :

$$(14) \quad \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{OI}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

Les équations (13) et 14 donnent deux relations de grandissement avec origine aux foyers :

$$\gamma = \frac{f'}{\overline{FA}} = \frac{\overline{F'A'}}{f}$$

En outre, de ces deux mêmes équations on tire la relation de conjugaison de Newton :

$$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = f f' = -f'^2$$

#### 4.5 Grandissement angulaire – Formule de Lagrange-Helmholtz

Soit  $A'$  l'image par une lentille d'un objet  $A$  ponctuel sur l'axe optique. Soit un rayon quelconque venant de  $A$  et frappant la lentille en un point  $I$ ; le rayon émergent correspondant l'axe optique en  $A'$  par définition. Soient  $\alpha$  et  $\alpha'$  les angles  $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AI})$  et  $(\overrightarrow{A'O}, \overrightarrow{A'I})$  (voir FIG. 33).

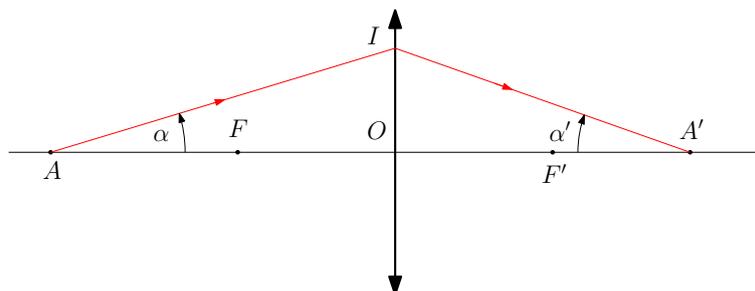


FIG. 33 : Le grandissement angulaire est défini par  $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$ .

On appelle grandissement angulaire le rapport :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha}$$

Contrairement aux apparences,  $G$  ne dépend pas de  $I$  car on a :

$$\tan \alpha \simeq \alpha = \frac{\overline{OI}}{AO} \quad \text{et} \quad \tan \alpha' \simeq \alpha' = \frac{\overline{OI}}{A'O}$$

On en déduit  $G = \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}}$  soit encore, en utilisant la relation de grandissement de Descartes :

$$G\gamma = 1$$

C'est la formule de Lagrange-Helmholtz.

## 5 Association de systèmes centrés

Soit l'association de  $n$  systèmes optiques centrés (en pratique ce sera généralement des lentilles minces et des miroirs sphériques) :

$$(S_1) (S_2) \dots (S_n)$$

### Détermination de l'image d'un objet $AB$

On a alors :

$$A \xrightarrow{(S_1)} A'_1 \xrightarrow{(S_2)} A'_2 \dots \xrightarrow{(S_n)} A'$$

L'application successive des  $n$  formules de conjugaison donne successivement  $A'_1, A'_2, \dots$  et finalement  $A'$ .

De même, l'application successive des formules de grandissement permet d'obtenir  $\overline{A'B'}$  en fonction de  $\overline{AB}$ .

### Construction graphique

On trace deux rayons particuliers venant de  $B$ , puis les rayons émergents de chaque système optique par les méthodes de conjugaison (il est conseillé de tracer le rayon venant de  $B$  passant par  $F$ , comme cela le rayon incident sur  $(S_2)$  arrive parallèlement à l'axe optique).