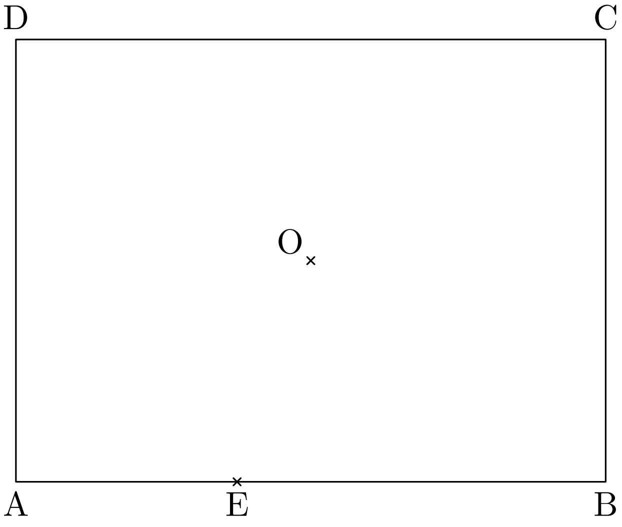
Lille (Sept.) – 1999



Dans ce problème, l'unité utilisée est le centimètre.
Soit $ABCD$ un rectangle de centre O tel que : $AB = 8$ et $BC = 6$ (voir figure ci-contre).
Soit E un point du segment $[AB]$ distinct de A et B.
La parallèle à (BD) passant par E coupe $[AD]$ en F.
On appelle G, le point du segment $[CD]$, symétrique de E par rapport à O, et H, le point du segment $[BC]$, symétrique de F par rapport à O.

Partie A

1/ Placer les points F, G et H.

2/ Démontrer que $EBGD$ est un parallélogramme.

3/ Soit K le point d'intersection de la droite (EF) et de la droite (CD).
Démontrer que $BEKD$ est un parallélogramme.

4/ Démontrer que D est le milieu de $[GK]$.

- (a) Que représente la droite (AD) pour le segment $[GK]$? Justifier.
- (b) En déduire que : $FG = FK$.
- (c) Démontrer que : $BD = EF + FG$.

5/
- (a) Démontrer que $EFGH$ est un parallélogramme.
- (b) Démontrer que son périmètre est égal à $2BD$.

Partie B

On rappelle que : $AB = 8$, $BC = 6$ et on pose : $AE = x$.

1/ À l'aide de la propriété de Thalès dans le triangle ABD, exprimer AF en fonction de x.

2/
- (a) Sans justifier, donner la transformation permettant d'affirmer que les triangles AFE et HCG ont la même aire.
- (b) Démontrer que : aire(AFE) + aire$(HCG) = \dfrac{3}{4}x^2$.
- (c) On admet que : aire(EBH) + aire$(FDH) = \dfrac{3}{4}x^2 - 12x + 48$.
  Montrer que l'aire du parallélogramme $EFGH$ est égale à : $12x - \dfrac{3}{2}x^2$.

3/ Quelle est l'aire du parallélogramme $EFGH$ lorsque E est au milieu de $[AB]$?

4/
- (a) Démontrer l'égalité : $24 - \dfrac{3}{2}(x-4)^2 = \dfrac{1}{2}aire(ABCD)$.
  Que remarque-t-on alors pour le point E ?