

Yannick et Annick, deux amis de longue date, parlent de leurs dernières lectures.

Yannick : Je viens de lire une nouvelle d'Isaac Asimov. Il invente un monde dans lequel les humains ne savent plus multiplier ou diviser, et encore moins extraire des racines carrées : tout est fait par des machines depuis si longtemps que personne ne se souvient qu'il en a déjà été autrement. Un modeste travailleur redécouvre comment multiplier...

Annick : Nous on ne saurait pas, sans calculatrice, calculer la racine carrée de 7 ?

Yannick : Pourtant, avant, les gens savaient comment faire. Ça m'intrigue de savoir comment... Tu vois Annick, pour calculer la racine carrée de 7, je constate qu'elle est entre 2 et 3.

Annick : Évidemment ! 2 au carré est plus petit que 7, alors que 3 au carré est plus grand que 7. La racine carrée est entre les deux, donc 2 virgule quelque chose.

Yannick : On recommence pour trouver le deuxième chiffre. On essaie 2,1 au carré, 2,2 au carré, etc... jusqu'à trouver que 2,6 au carré donne 6,76 et que 2,7 au carré donne 7,29. La racine carrée est donc entre 2,6 et 2,7, et est donc 2,6... On poursuit, trouvant un chiffre à la fois.

Annick : C'est un peu long, tu ne trouves pas ?

Yannick : Oui, mais je peux trouver autant de décimales que je veux. Je peux donc battre ma calculatrice qui ne me donne que 8 chiffres. Je peux en trouver d'autres, ce qui avoue-le est assez impressionnant.

Annick : C'est vrai ! Mais de façon générale ? Peux-tu donner une procédure qu'on pourrait appliquer sans se demander chaque fois « qu'est-ce que je dois faire maintenant ? » Ce serait plus simple.

Yannick reste préoccupé par la question d'Annick. Le temps fait son œuvre...

Yannick : Eureka ! J'ai trouvé une façon plus générale de traiter le problème.

Annick : Explique-moi ça.

Yannick : J'ai remarqué que si n est la racine carrée de 7, alors on doit avoir $n \times n = 7$. Par conséquent, je peux écrire $n = 7/n$.

Annick : À quoi ça sert si tu n'as pas la racine ?

Yannick : Ça me permet d'écrire $2 \times 7/2 = 7$.

Annick : La belle affaire, 2 n'est pas égal à 7/2, ce qui serait le cas si tu avais trouvé la racine.

Yannick : Je me suis fait la même remarque. J'ai même construit un rectangle dont la hauteur est 2 et la base est 7/2. C'est là que j'ai eu l'intuition qui m'a permis de trouver la méthode.

Annick : Je ne comprends pas ! On voit très bien que ta figure n'est pas un carré.

Yannick : Je me suis rappelé que la moyenne de deux nombres est un nombre compris entre les deux. J'ai donc pensé qu'en calculant cette moyenne et en l'utilisant comme hauteur, mon rectangle serait plus proche d'un carré.

Puisque la moyenne de deux nombres a et b est $\frac{a+b}{2}$, je trouve $\frac{2+7/2}{2} = \frac{11}{4}$.

Annick : Et alors ?

Yannick : En refaisant mon dessin, j'ai constaté que je m'approchais de la vraie valeur. La hauteur de mon rectangle était maintenant $11/4 = 2,75$ et sa base était $28/11 = 2,5454...$ J'ai alors pensé refaire la même chose et j'ai trouvé $233/88$ comme moyenne. En prenant cette valeur comme hauteur ma base est $\frac{7}{233/88}$.

Je calcule encore la moyenne et je trouve $\frac{108497}{41008}$. En vérifiant avec ma calculatrice, je constate que cela donne 2,645752... alors que la racine carrée de 7 est 2,645751...

Annick : Wow ! Tu as eu les cinq premières décimales avec seulement trois calculs.

Yannick : Et si je calcule une autre moyenne, j'ai les 10 premières décimales correctes, ce que ma calculatrice ne peut me donner.

Annick : Vraiment impressionnant ! Félicitations.

1/ Qui est Isaac Asimov ?

2/ Il y a deux méthodes décrites dans le dialogue. Déterminer $\sqrt{10}$ avec quatre décimales par la première méthode. *On pourra faire les calculs à l'aide de la calculatrice et indiquer les résultats dans un tableau.*

3/ Pour la deuxième méthode,

(a) Vérifie les calculs indiqués.

(b) Détermine les 10 premières décimales de $\sqrt{12}$. On indiquera *clairement* les calculs.