FORMULE DE HÉRON.

(★ ★ ★ ★ ★)

La formule de Héron permet de calculer l'aire d'un triangle connaissant ces trois côtés.
Si les longueurs des côtés sont a, b, c alors en appelant p le demi-périmètre du triangle et S l'aire du triangle, on a

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Pour la démonstration, on considère un triangle ABC, de hauteur AH, tel que $\widehat{BAC}$ soit un angle aigu.
On appelle :

- a, b, c les longueurs respectives des côtés BC, AC et AB ;
- h_a la hauteur AH ;
- x la longueur HC.

1/ Exprime S en fonction de a et h_a.

2/ Exprime p en fonction de a, b et c.

3/ Exprime c^2 en fonction de a, b et x.

4/ (a) Déduis-en l'écriture de x en fonction de a, b et c.

(b) Déduis-en l'écriture de h_a^2 en fonction de a, b et c. Montre ensuite que l'on peut écrire :

$$h_a^2=\left(b-\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)\times\left(b+\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)$$

puis sous la forme

$$h_a^2=\frac{1}{4a^2}\left(2ab-a^2-b^2+c^2\right)\left(2ab+a^2+b^2-c^2\right)$$

(c) Factorise l'expression $\left(2ab-a^2-b^2+c^2\right)$.

(d) Factorise l'expression $\left(2ab+a^2+b^2-c^2\right)$.

5/ En étudiant S^2, déduis-en la formule de Héron.