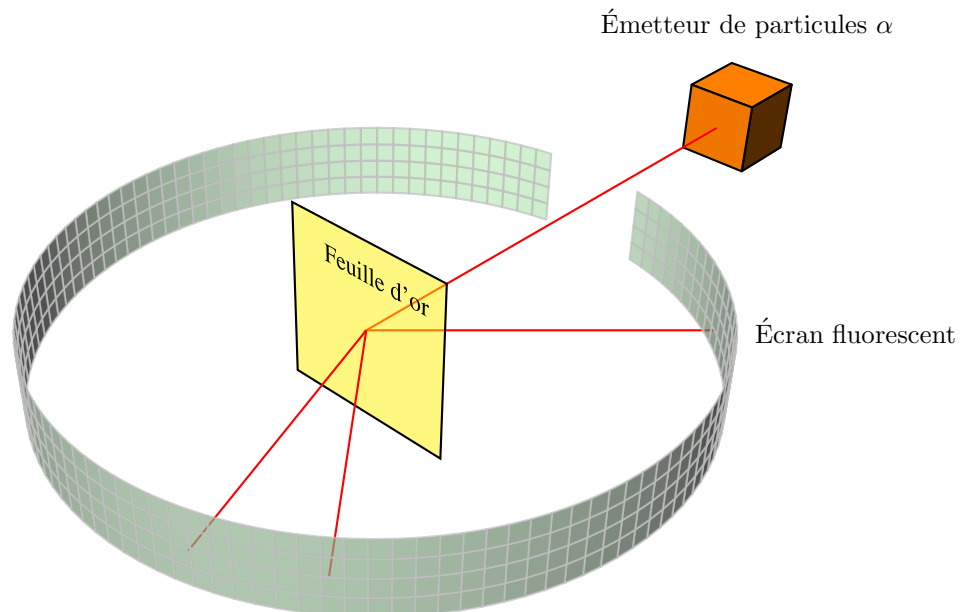


1 La découverte de la diffusion des particules α par le noyau d'or

1.1 L'expérience d'Ernest Rutherford en 1909

Rutherford bombarde avec des particules α (noyau d'hélium : 2 neutrons et 2 protons) une mince feuille d'or.



2 Le potentiel coulombien – donnant des trajectoires hyperboliques

Prenons un repère cartésien. La masse m_0 d'une particule α a pour coordonnées (x/y) et vitesse $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$. La particule d'or est placée dans l'origine $O(0/0)$. Soit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ la distance entre l'origine et la masse m_0 .

L'énergie cinétique a pour expression :

$$T(\dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2} m_0 v^2 = \frac{1}{2} m_0 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

L'énergie potentielle coulombienne :

$$U(x, y) = \frac{Z_1 Z_2 e_0^2}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{dont} \quad k = \frac{Z_1 Z_2 e_0^2}{4\pi\epsilon_0}$$

Le Lagrangien est :

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = T - U = \frac{1}{2} m_0 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Les équations de Lagrange s'écrivent : Pour x, \dot{x} :

$$\frac{\partial L}{\partial x} = k \frac{x}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m_0 \dot{x}$$
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m_0 \ddot{x}$$

Alors

$$m_0 \ddot{x} - k \frac{x}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3} = 0$$

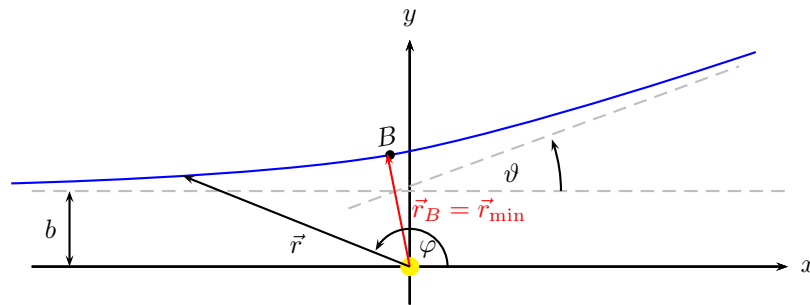
En divisant par m_0

$$\ddot{x} = \frac{k}{m_0} \frac{x}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3}$$

Le Lagrangien étant symétrique en x et y , alors :

$$\ddot{y} = \frac{k}{m_0} \frac{y}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3}$$

3 La symétrie des trajectoires



Le vecteur \vec{r}_B est l'axe de symétrie de la hyperbole

Prenons des coordonnées polaires avec les transformations usuelles :

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Ça donne pour la vitesse :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Le moment cinétique :

$$\vec{L} = m_0 \vec{r} \times \vec{v} = m_0 \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = m_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r^2 \dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

Conservation du moment cinétique demande que

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$$

autrement dit :

$$r^2 \dot{\varphi} = \text{cste} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{1}{r^2} \cdot \text{cste}$$

La transformation $\varphi = \arctan \frac{y}{x}$ se dérive par rapport au temps :

$$\dot{\varphi} = \frac{d}{dt} \varphi = \frac{d}{dt} \left(\arctan \frac{y}{x} \right) = \frac{1}{r^2} (x\dot{y} - \dot{x}y)$$

On peut déduire que $x\dot{y} - \dot{x}y$ est constante pour chaque temps t , alors aussi pour le temps $t_0 = 0$ (les conditions initiales) : $x = x_0, y = b, \dot{x} = v_0, \dot{y} = 0$

$$\frac{1}{r^2} = -\frac{1}{bv_0} \frac{d\varphi}{dt}$$

Prenons la composante y de la force coulombienne :

$$F_y = m_0 \frac{dv_y}{dt} = \frac{k}{r^2} \sin \varphi = -\frac{k}{bv_0} \frac{d\varphi}{dt} \sin \varphi$$

Intégrant l'équation entre t_0 et t_E (presque infini)

$$m_0 \int_{t_0}^{t_E} \frac{dv_y}{dt} dt = -\frac{k}{bv_0} \int_{t_0}^{t_E} \frac{d\varphi}{dt} \sin \varphi dt$$

Substitutions des limites de l'intégral :

$$m_0 \int_{v_y(t_0)}^{v_y(t_E)} dv_y = -\frac{k}{bv_0} \int_{\varphi(t_0)}^{\varphi(t_E)} \sin \varphi d\varphi$$

Avec $v_y(t_0) = 0$, $v_y(t_E) = v_0 \sin \vartheta$, $\varphi(t_0) = \pi$ et $\varphi(t_E) = \vartheta$

$$m_0 v_y \Big|_0^{v_0 \sin \vartheta} = \frac{k}{bv_0} \cos \varphi \Big|_{\pi}^{\vartheta}$$

puis

$$m_0 v_0 \sin \vartheta = \frac{k}{bv_0} (\cos \vartheta + 1)$$

$$b = \frac{k}{m_0 v_0^2} \frac{\cos \vartheta + 1}{\sin \vartheta} = \frac{k}{m_0 v_0^2} \cot \left(\frac{\vartheta}{2} \right)$$

Nommons l'énergie initiale $E_0 = \frac{1}{2} m_0 v_0^2$ on reçoit :

$$b(\vartheta) = \frac{k}{2E_0} \cot \left(\frac{\vartheta}{2} \right)$$

4 La distance minimale entre le particule α et le noyau d'or

Le moment cinétique en point B , qui a la distance minimale $r_B = r_{\min}$ (là $\vec{r}_B \perp \vec{v}_B$) est

$$L_B = m_0 r_B v_B$$

Le moment cinétique initiale est $L_0 = m_0 b v_0$. La conservation du moment cinétique $L_B = L_0$ donne :

$$r_B = \frac{v_0}{v_B} b$$

Prenons encore l'intégrale de la force coulombienne en direction y , mais seulement au point B par le temps t_B :

$$m_0 \int_{v_y(t_0)}^{v_y(t_B)} dv_y = -\frac{k}{bv_0} \int_{\varphi(t_0)}^{\varphi(t_B)} \sin \varphi d\varphi$$

Avec $v_y(t_0) = 0$, $v_y(t_B) = v_B \sin \left(\frac{\vartheta}{2} \right)$, $\varphi(t_0) = \pi$ et $\varphi(t_B) = \frac{\pi + \vartheta}{2}$

$$m_0 v_y \Big|_0^{v_B \sin \left(\frac{\vartheta}{2} \right)} = \frac{k}{bv_0} \cos \varphi \Big|_{\pi}^{\frac{\pi + \vartheta}{2}}$$

on reçoit

$$m_0 v_B \sin \left(\frac{\vartheta}{2} \right) = \frac{k}{bv_0} \left[\cos \left(\frac{\pi + \vartheta}{2} \right) + 1 \right]$$

Avec la formule trigonométrique $\cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\vartheta}{2} \right) = -\sin \left(\frac{\vartheta}{2} \right)$:

$$v_B = \frac{k}{b m_0 v_0} \frac{1 - \sin \left(\frac{\vartheta}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\vartheta}{2} \right)}$$

Substituant $r_B = \frac{v_0}{v_B} b$ et avec l'énergie initiale $E_0 = \frac{1}{2} m_0 v_0^2$ on reçoit :

$$r_{\min} = r_B(\vartheta) = \frac{k}{2E_0} \frac{1 + \sin \left(\frac{\vartheta}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\vartheta}{2} \right)} = b(\vartheta) \frac{1 + \sin \left(\frac{\vartheta}{2} \right)}{\cos \left(\frac{\vartheta}{2} \right)}$$

5 Point de retour

Soit $b = 0$, le particule α mouve directement vers le noyau d'or sur l'axe x et à une distance r_C du noyau d'or (point C) sa vitesse devient $v_C = 0$. Prenons la conservation de l'énergie :

$$\frac{1}{2}m_0v_0^2 = \frac{k}{r_0} + \frac{1}{2}m_0 \underbrace{v_C^2}_{=0}$$

Ça donne

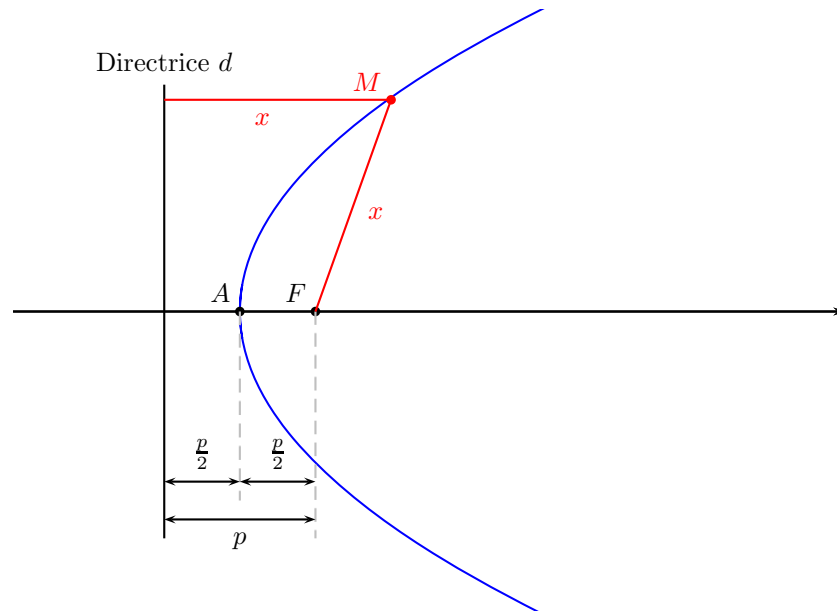
$$r_C = \frac{2k}{m_0v_0^2}$$

et avec la notation de l'énergie initiale $E_0 = \frac{1}{2}m_0v_0^2$ on reçoit :

$$r_C = \frac{k}{E_0}$$

6 L'enveloppe des trajectoires

La parabole est la courbe d'équidistance entre un point (le foyer F) et une droite (la directrice d).



Une parabole en nomination polaire :

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 - \cos \varphi}$$

Le paramètre p est la distance du foyer F de la parabole à la directrice d .

L'enveloppe des trajectoires hyperboles est une parabole avec $p = 2r_C$:

$$r(\varphi) = \frac{2r_C}{1 - \cos \varphi}$$

7 Les trajectoires des particules α

Les paramètres suivants de l'expérience originale sont :

$$m_0 = 6,64 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$e_0 = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A s}}{\text{kg m}^3}$$

$$Z_1 = 2$$

$$Z_2 = 79$$

$$v_{0x} = 2,1 \cdot 10^7 \text{ m s}^{-1}$$

