Calculs pour les anamorphoses cylindriques en 3D

manuel.luque27@gmail.com

29 septembre 2011

1 Principe

Il est identique à l'anamorphose plane, je renvoie donc au schéma précédent. On tient compte des trois coordonnées de l'objet. Les modifications sont minimes. Pour la représentation en 3D du phénomène c'est le package pst-solides3d qui est utilisé avec l'option transform. Les images calculées ne reproduisent pas fidèlement l'anamorphose 3D car si l'option transform calcule correctement les sommets, les arêtes sont tracées comme des segments de droite alors qu'il faudrait faire les calculs pour un nombre de points assez grand de chaque arête et les joindre (comme dans l'anamorphose plane).

J'ai placé à l'intérieur du cylindre l'objet-image 3D tel qu'elle doit être vue par un observateur regardant dans le miroir cylindrique (on peut la placer à l'extérieur, mais il faut que les rayons lumineux rencontrent toujours le cylindre, il faut donc veiller aux dimensions). L'objet anamorphique est « l'objet déformé » dont le miroir reconstituera les proportions réelles.

Objet et image obéissent aux lois de la réflexion de l'optique géométrique :

- rayon incident et rayon réfléchi appartiennent à un même plan ;
- rayon incident et rayon réfléchi sont symétriques par rapport à la normale au miroir au point d'incidence.

L'image non déformée (celle qui est vue dans le miroir) est placée, dans cet exemple, au centre du miroir. Un rayon incident partant de l'objet anamorphique se réfléchit sur le miroir et après réflexion parvient à l'œil de notre observateur. L'observateur a l'illusion que le rayon provient du point image. Il faut donc reconstruire mathématiquement la marche d'un tel rayon lumineux en partant de l'image dans le miroir.

L'observateur est suffisamment éloigné du miroir pour pouvoir être considéré comme ponctuel.

2 Les calculs

Soit P un point de l'image, V l'œil de l'observateur. Traçons un droite PV et déterminons le point d'intersection I avec le cylindre : c'est le point d'incidence.

$V(x_V, y_V, z_V)$ et $P(x_P, y_P, z_P)$

L'équation paramétrique de la droite (PV) s'écrit $\overrightarrow{IV} = \rho\overrightarrow{PV}$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_V - x_I & = & \rho(x_V - x_P) \\ y_V - y_I & = & \rho(y_V - y_P) \\ z_V - z_I & = & \rho(z_V - z_P) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x_I & = & x_V(1-\rho) + \rho x_P \\ y_I & = & y_V(1-\rho) + \rho y_P \\ z_I & = & z_V(1-\rho) + \rho z_P \end{array}\right.$$

Le point I appartenant au cylindre, ses coordonnées vérifient la relation :

$$x_I^2 + y_I^2 = R$$

Après développement, on obtient l'équation du second degré en ρ:

$$a\rho^2 + 2b'\rho + c = 0$$

avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a = (x_V - x_P)^2 + (y_V + y_P)^2 \\ b' = x_V x_P + y_V y_P - x_V^2 - y_V^2 \\ c = x_V^2 + y_V^2 - R^2 \end{array}\right.$$

La résolution de cette équation nous donne les solutions classiques:

$$\left\{\begin{array}{l} \rho' = \dfrac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} \\ \rho'' = \dfrac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} \end{array}\right. \qquad \Delta' = b'^2 - ac$$

On retiendra la plus petite valeur positive des deux, que par la suite j'appelle ρ et `Coeff1` dans le programme.

IV représente le rayon réfléchi par le miroir. Le rayon incident est défini par la droite symétrique de IV par rapport à la normale au miroir en I. Je cherche le symétrique de V, nommé V' par rapport à cette normale IN. Ce point V' remplit deux conditions :

1. $\overrightarrow{IV} + \overrightarrow{IV'} = k\overrightarrow{IN}$
2. $\overrightarrow{VV'}.\overrightarrow{IN} = 0$

La normale (IN) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{IN}(x_I, y_I, 0)$
La première condition se traduit par :

$$\left\{\begin{array}{l} x_V - x_I + x_{V'} - x_I = kx_I \\ y_V - x_I + y_{V'} - y_I = ky_I \\ z_V - z_I + z_{V'} - z_I = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_{V'} = kx_I + 2x_I - x_V \\ y_{V'} = ky_I + 2y_I - y_V \\ z_{V'} = 2z_I - z_V \end{array}\right.$$

La deuxième par :

$$(x_{V'} - x_V)x_I + (y_{V'} - y_V)y_I = 0$$

En remplaçant $x_{V'}$ et $y_{V'}$ tirés de la première condition dans la deuxième :

$$k(x_I^2 + y_I^2) + 2x_I^2 - 2x_V x_I + 2y_I^2 - 2y_V y_I = 0$$

$$kR^2 + 2R^2 = 2(x_V x_I + y_V y_I)$$

$$k + 2 = \frac{2}{R^2}(x_V x_I + y_V y_I)$$

Les coordonnées de V' s'en déduisent :

$$\begin{cases} x_{V'} = (k+2)x_I - x_V \\ y_{V'} = (k+2)y_I - y_V \\ z_{V'} = z_V(1 - 2\rho) \end{cases}$$

Il reste à trouver l'intersection de (IV') avec le plan horizontal $z = 0$.

Équation paramétrique de IV', M étant un point courant : $\overrightarrow{MV'} = \alpha\overrightarrow{IV'}$

$$\begin{cases} x'_V - x = \alpha(x_{V'} - x_I) \\ y_{V'} - y = \alpha(y_{V'} - y_I) \\ z_{V'} - z = \alpha(z_{V'} - z_I) \end{cases}$$

$z = 0 \Longrightarrow \alpha = \dfrac{z_{V'}}{z_{V'} - z_I}$ soit

$$\alpha = \frac{(1 - 2\rho)z_V + \rho z_P}{-\rho z_V + \rho z_P}$$

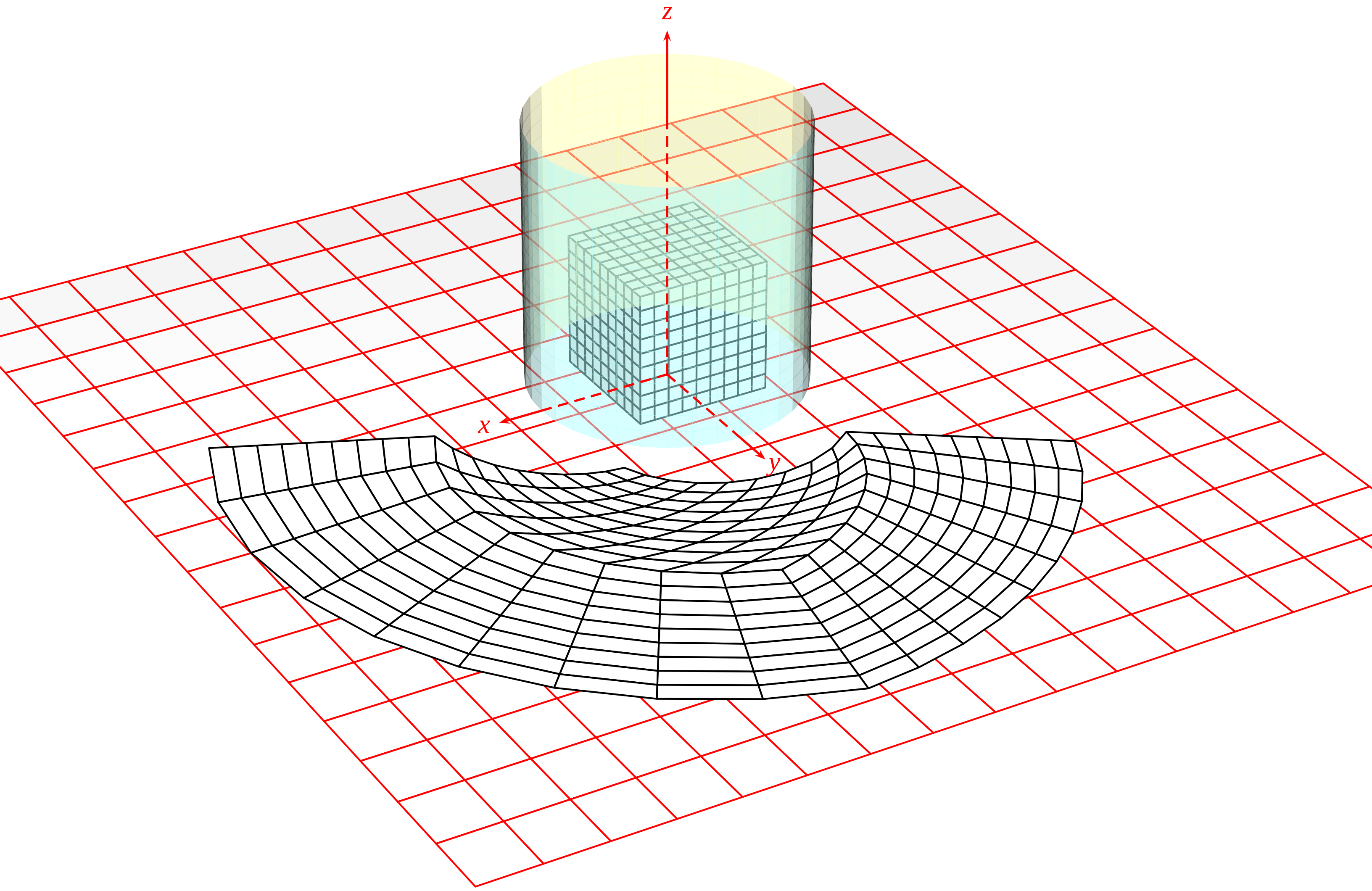
En remplaçant α par son expression, nous obtenons les coordonnées du point de l'objet anamorphique.

$$\begin{cases} x = x_{V'} - \alpha(x_{V'} - x_I) \\ y = y_{V'} - \alpha(y_{V'} - y_I) \end{cases}$$

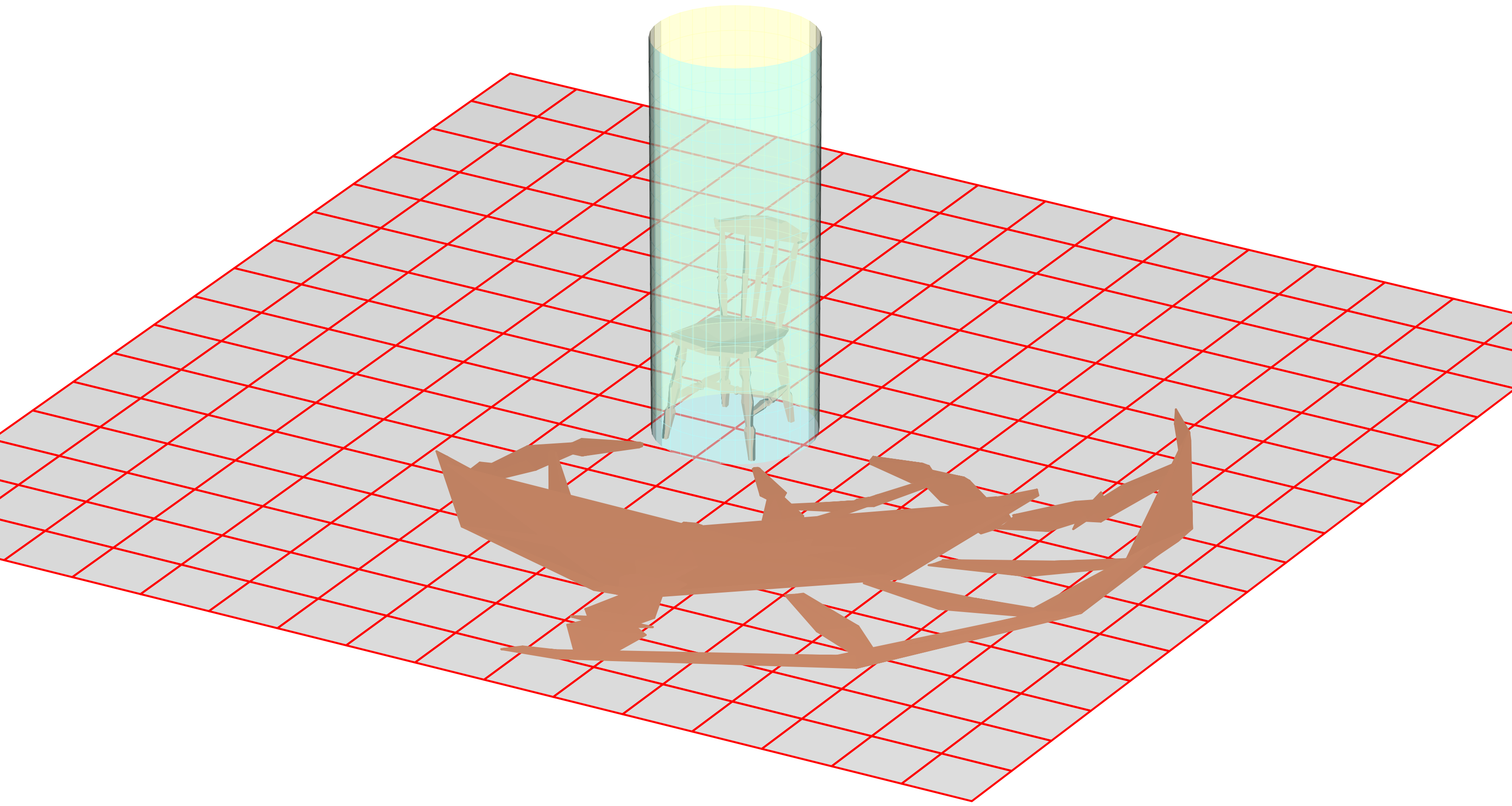
Cette série de calculs doit être appliquée à tous les points de l'image « normale » afin d'obtenir l'objet anamorphique (déformé) dont le miroir « redressera » la forme.

On notera que, en 3D, la cote de l'observateur z_V intervient dans le coefficient α.

3 Anamorphose d'un cube



4 Anamorphose d'une chaise : idée de Juergen Gilg



5 Anamorphose d'un tore