Mouvement d'une particule dans un champ magnétique avec frottement (éléments de calculs)

Le mouvement de la particule est plan, la vitesse ititiale est perpendiculaire à la direction du champ magnétique, et le frottement pris en compte est proportionnel au carré de la vitesse.

Dans un repère orthonormé du plan du mouvement on dispose alors des équations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \ddot{x} & = & \omega\dot{y} - f\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,\dot{x} \\ \ddot{y} & = & -\omega\dot{x} - f\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,\dot{y} \end{array}\right.$$

où f et w sont deux constantes dépendantes des conditions physiques.

1 Expression des coordonnées

Dans la suite, on note $v = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$ le module de la vitesse et φ un argument de celle-ci. On a alors :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2+\dot{y}^2}.$$

Des équations du mouvement, on déduit alors :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -fv^2 \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = -\omega.$$

Ces équations s'intègrent bien et on obtient :

$$v = \frac{v_0}{1+fv_0t} \quad \text{et} \quad \varphi = \varphi_0 - \omega t,$$

où v_0 et φ_0 sont le module et un argument de la vitesse initiale ($t = 0$).

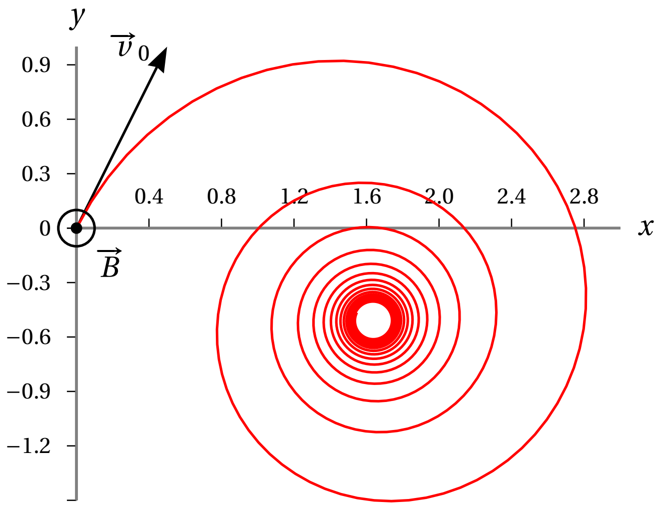
Nous connaissons donc le module et un argument de la vitesse à chaque instant. Nous pouvons en déduire les coordonnées du vecteur vitesse et, par intégration, les coordonnées de la particule.

En supposant qu'en $t = 0$ la particule est à l'origine du repère :

$$x = \int_0^t \frac{v_0\cos(\varphi_0-\omega s)}{1+fv_0s}\mathrm{d}s, \quad y = \int_0^t \frac{v_0\sin(\varphi_0-\omega s)}{1+fv_0s}\mathrm{d}s.$$

2 La trajectoire

Voici la trajectoire (spirale de NIELSEN) obtenue à l'aide de **PSTricks** (MANUEL LUQUE). Les points sont déterminés par intégration du système différentiel à l'aide d'une méthode de RUNGE-KUTTA. Il est, bien sûr, plus facile de procéder ainsi que d'utiliser l'expression des coordonnées. Par ailleurs le temps de calcul est bien plus court.




```
\newcommand{\InitCond}{0 0 5 10}
\newcommand{\OMEGA}{6.283185}
\newcommand{\f}{0.1}
\def\mvtB{y[2]|y[3]|%
  \OMEGA*y[3]-\f*(sqrt(y[2]^2+y[3]^2))*y[2]|%
  -\OMEGA*y[2]-\f*(sqrt(y[2]^2+y[3]^2))*y[3]%
}
\begin{center}
\psset{unit=2}%
\begin{pspicture}(0,-2)(3,1.5)
%% ------------------ Les axes
\psaxes[Dx=0.4,Dy=0.3,
  linecolor={[rgb]{0.5 0.5 0.5}}, labelFontSize=\scriptstyle,
  xlabelPos=top, xticksize=3pt 0, yticksize=-3pt 0](0,0)(0,-1.5)(3,1)
\uput[u](0,1){$y$}
\uput[r](3,0){$x$}
%% ------------------ La vitesse initiale
\psline[arrowinset=0.1, arrowsize=0.1]{->}(0.5,1)%
\uput[l](0.5,1){$\overrightarrow{v}_0$}
%% ------------------ La trajectoire (intégrée)
\psset{method=rk4, algebraic=true, whichabs=0, whichord=1}
\psplotDiffEqn[linecolor=red, plotpoints=1000]{0}{15}{\InitCond}{\mvtB}
%% ------------------ Décoration
\pscircle{0.1}\psdot(0,0)
\uput{3mm}[dr](0,0){$\overrightarrow{B}$}
\end{pspicture}
\end{center}
```

3 Le point limite

Du fait du frottement le système est *dissipatif*, la particule tend à s'immobiliser en un *point limite* comme on le constate à partir de la trajectoire tracée. Les coordonnées de ce point sont :

$$x_\ell = \int_0^\infty \frac{v_0 \cos(\varphi_0 - \omega t)}{1 + f v_0 t} \mathrm{d}t, \quad y_\ell = \int_0^\infty \frac{v_0 \sin(\varphi_0 - \omega t)}{1 + f v_0 t} \mathrm{d}t.$$

Les intégrales ci-dessus sont des intégrales impropres (domaine infini) convergentes, le calcul d'une bonne approximation est assez délicat à priori. Graphiquement, nous pouvons nous contenter d'intégrations partielles sur un domaine fini (assez grand) pour pouvoir superposer le point limite sur la trajectoire.

Il existe toutefois des *fonctions spéciales*, cosinus intégral et sinus intégral, qui permettent de réduire le calcul de ces intégrales à celui d'intégrales tout à fait ordinaires.

Voici un petit formulaire pour $x > 0$:

Sinus intégral : $\mathrm{Si}(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ et $\mathrm{si}(x) = -\displaystyle\int_x^\infty \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$

Cosinus intégral : $\mathrm{Ci}(x) = -\displaystyle\int_x^\infty \frac{\cos t}{t} \mathrm{d}t$ et $\mathrm{ci}(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\cos t - 1}{t} \mathrm{d}t$

Relations : $\mathrm{Si}(x) - \mathrm{si}(x) = \dfrac{\pi}{2}$ et $\mathrm{Ci}(x) - \mathrm{ci}(x) = \gamma + \ln x$ (γ : constante d'EULER)

Après développement des sinus et cosinus présents dans les expressions de x_ℓ et y_ℓ et quelques changements de variables dans les intégrales nous obtenons :

$$\begin{aligned}
x_\ell &= -\frac{1}{f} \sin\left(\varphi_0 + \frac{\omega}{f v_0}\right) \mathrm{si}\left(\frac{\omega}{f v_0}\right) - \frac{1}{f} \cos\left(\varphi_0 + \frac{\omega}{f v_0}\right) \mathrm{Ci}\left(\frac{\omega}{f v_0}\right) \\
y_\ell &= -\frac{1}{f} \sin\left(\varphi_0 + \frac{\omega}{f v_0}\right) \mathrm{Ci}\left(\frac{\omega}{f v_0}\right) + \frac{1}{f} \cos\left(\varphi_0 + \frac{\omega}{f v_0}\right) \mathrm{si}\left(\frac{\omega}{f v_0}\right)
\end{aligned}$$

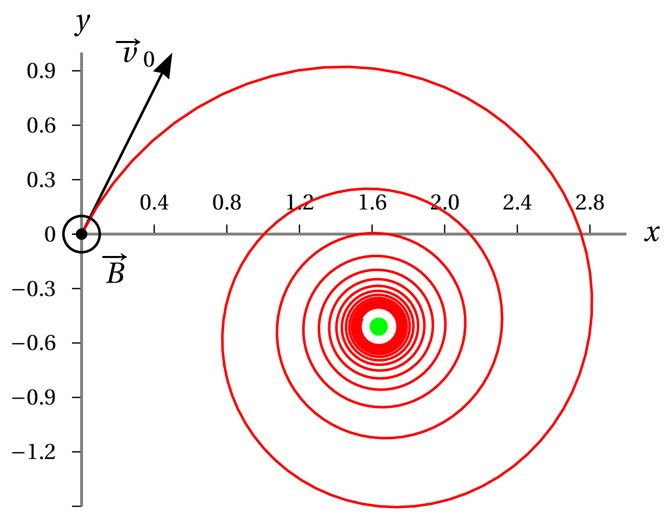
Les intégrales impropres présentes dans ces expressions au travers de Ci et si se réduisent à des calculs d'intégrales sur des segments à l'aide des relations au-dessus. Tout ceci étant implémenté avec **PSTricks** (package `pst-func`), nous allons pouvoir obtenir un calcul assez précis des coordonnées du point limite.

En ajoutant le code suivant à la celui de la première figure :

```
%% === Bloc de calcul, en postscript des coordonnées du point limite
\makeatletter
\pstVerb{
  /f \f\space def
  /OMEGA \OMEGA\space def
  /Pi 3.14159265359 def
  /phi0 10 5 atan 180 div Pi mul def
```

```
  /v 10 dup mul 5 dup mul add sqrt def
  /phi1 OMEGA f v mul div def
  /S1 phi0 phi1 add Pi div 180 mul sin f div def
  /C1 phi0 phi1 add Pi div 180 mul cos f div def
  /S2 {phi1 tx@FuncDict begin si end} def
  /C2 {phi1 tx@FuncDict begin Ci end} def
  /xl {S1 S2 mul C1 C2 mul add neg} def
  /yl {S1 C2 mul C1 S2 mul sub neg} def
}%
\makeatother
.......................................................................
%% === Inscription du point limite
\pscircle*[linecolor=green](!xl yl){0.05}
.......................................................................
%% === Report des coordonnées du point limite
\(x_\ell\) = \psPrintValue{xl}\hspace{1.25cm}\(y_\ell\)=\psPrintValue{yl}
```

nous obtenons la figure *complète* suivante :



x_ℓ = 1.6366 $\quad y_\ell$=-0.510018

Voici une séquence de calcul des coordonnées du point limite avec ***Mathematica***, elle montre que les résultats obtenus avec **PSTricks** sont tout à fait satisfaisants.

Vitesse initiale :

```
v = Sqrt[5.^2+10.^2]
```

11.1803

Argument initial :

```
a = ArcTan[10./5.]
```

1.10715

Abscisse du point limite :

```
x = Integrate[v Cos[a-2Pi t]/(1+0.1v t), {t,0,Infinity}] // Chop
```

1.6366

Ordonnée du point limite :

```
x = Integrate[v Sin[a-2Pi t]/(1+0.1v t), {t,0,Infinity}] // Chop
```

−0.510017

La **spirale de Nielsen** ou encore **spirale sici** :

```
ParametricPlot[{CosIntegral[t],SinIntegral[t]}, {t,0,50}]
```