Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique, avec frottement

14 mai 2012

1 Équations du mouvement et trajectoire

On suppose $q > 0$, et la force de frottement proportionnelle à v^2 :

$$\overrightarrow{F} = -hv^2\frac{\overrightarrow{v}}{v}$$

Hypothèse : $\overrightarrow{B}$ normal à $\overrightarrow{v}_0$. La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la particule donne :

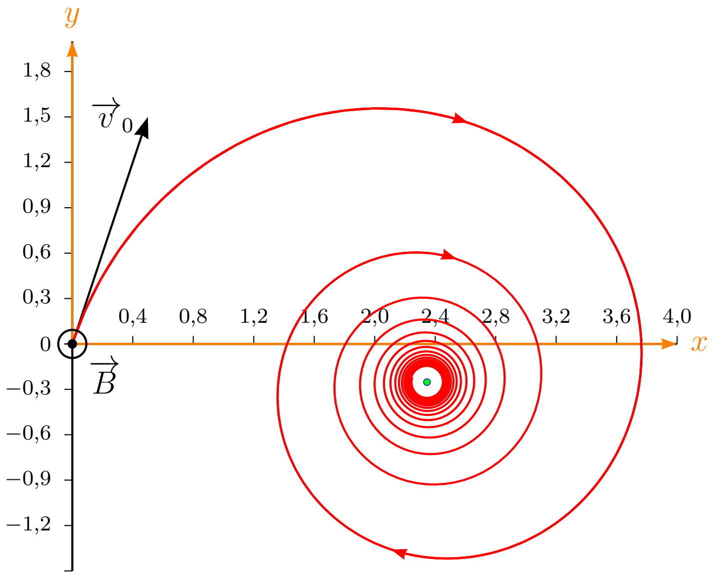
$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{q}{m}\overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{v} - \frac{h}{m}v\overrightarrow{v} \tag{1}$$

On pose $\omega = \dfrac{qB}{m}$ et $f = \dfrac{h}{m}$ avec :

$$\overrightarrow{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{bmatrix} \qquad \text{et} \quad v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcr} \ddot{x} & = & \omega\dot{y} - fv\dot{x} \\ \ddot{y} & = & -\omega\dot{x} - fv\dot{y} \end{array} \right. \tag{2}$$

```
                    %% x  y  x'  y'
\newcommand{\InitCond}{ 0  0  5   15}
\newcommand{\OMEGA}{6.283185} % 2Pi
\newcommand{\f}{0.1}
\psplotDiffEqn[linecolor=red, plotpoints=1000]
     {0}{10}{\InitCond}{y[2]|y[3]|
                          \OMEGA*y[3]-\f*(sqrt(y[2]^2+y[3]^2))*y[2]|
                         -\OMEGA*y[2]-\f*(sqrt(y[2]^2+y[3]^2))*y[3]}
```



x_ℓ = 2,34561 y_ℓ =-0,252525

2 Détermination du point limite

La trajectoire s'enroulant en spires décroissantes, elle possède un point limite. Le problème est de calculer les coordonnées de ce point. Voici la solution de Jean-Michel Sarlat.

On multiplie, scalairement, par $\vec{v}$ les deux membres de l'équation de la relation fondamentale de la dynamique (1) :

$$\vec{v}\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{h}{m}v^3 \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{h}{m}v^2$$

Ce qu'on écrit :

$$\frac{1}{v^2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{h}{m}$$

afin de pouvoir intégrer :

$$\frac{1}{v} = \frac{h}{m}t + \frac{1}{v_0}$$

On en déduit l'expression de la vitesse :

$$v = \frac{v_0}{1 + v_0\dfrac{h}{m}t}$$

Cette expression montre que la vitesse tend à s'annuler, ce qui était évident du fait de l'existence de frottements. On élimine v dans le système (2), en multipliant la première équation par $\dot{y}$, la seconde par $\dot{x}$ et en les retranchant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{y}\ddot{x} & = & \omega\dot{y}^2 - fv\dot{x}\dot{y} \\ \dot{x}\ddot{y} & = & -\omega\dot{x}^2 - fv\dot{y}\dot{x} \end{array}\right.$$

$$\dot{y}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{y} = \omega(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \tag{3}$$

On pose $\tan\varphi = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$, ($\varphi$ est l'argument de la vitesse), soit $\varphi = \arctan\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$ et on calcule que :

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\dfrac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2}}{1 + \left(\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = -\omega$$

En intégrant, on a :

$$\varphi = -\omega t + \varphi_0$$

Où φ_0 est l'argument de la vitesse initiale. On note au passage que le vecteur vitesse *tourne* uniformément.

Nous connaissons donc le module et un argument de la vitesse à chaque instant. Nous pouvons en déduire les coordonnées du vecteur vitesse et, par intégration, les coordonnées du point mobile.

Sachant que le *point limite* est atteint au bout d'un temps infini (vitesse nulle), nous obtenons ainsi une expression intégrale de ses coordonnées.

$$x_\ell = \int_0^\infty \frac{v_0\cos(-\omega t + \varphi_0)}{1 + fv_0t}\mathrm{d}t \quad , \quad y_\ell = \int_0^\infty \frac{v_0\sin(-\omega t + \varphi_0)}{1 + fv_0t}\mathrm{d}t$$

Le calcul de ces intégrales s'effectue à l'aide d'une commande :

```
\def\psIntR{\pst@object{psIntR}}
\def\psIntR@i(#1,#2)#3{%
% (#1,#2) bornes de l'intervalle
% #3 fonction écrite en postscript ou en notation algébrique,
% t est la variable
```

basée sur la méthode de Simpson, avec une *petite accélération* de la convergence « à la Richardson ». Elle stocke le résultat dans la variable postscript `/I`. Elle s'utilise ainsi :

```
\pstVerb{/Pi 3.14159265359 def
         /fr \f\space def
         /vi 15 dup mul 5 dup mul add sqrt def
         /phi0 15 5 atan 180 div Pi mul def}%
\def\xLim{vi*cos(phi0-2*Pi*t)/(1+fr*vi*t)}
\def\yLim{vi*sin(phi0-2*Pi*t)/(1+fr*vi*t)}
\psIntR[algebraic](0,250){\xLim}%
\pstVerb{/xL I def}%
\psIntR[algebraic](0,250){\yLim}%
\pstVerb{/yL I def}%
```

On affiche les résultats avec la macro : `\psPrintValue{xL}` et `\psPrintValue{yL}`. À titre de comparaison, le calcul effectué avec Maple donne $x_\ell = 2.34554$ et $y_\ell = -.252408$ contre $x_\ell = 2.34561$ et $y_\ell = -.252525$ avec la macro `\psIntR`.