Mouvement d'un proton ou d'une particule électrisée dans une chambre à bulles

16 mai 2012

1 Équations du mouvement

La force de frottement proportionnelle à v :

$$\overrightarrow{F} = -h\overrightarrow{v}$$

Hypothèse : $\overrightarrow{B}$ normal à $\overrightarrow{v}_0$.

$$\overrightarrow{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{bmatrix}$$

On pose $\omega = \dfrac{qB}{m}$ et $\tau = \dfrac{m}{h}$.

La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la particule donne :

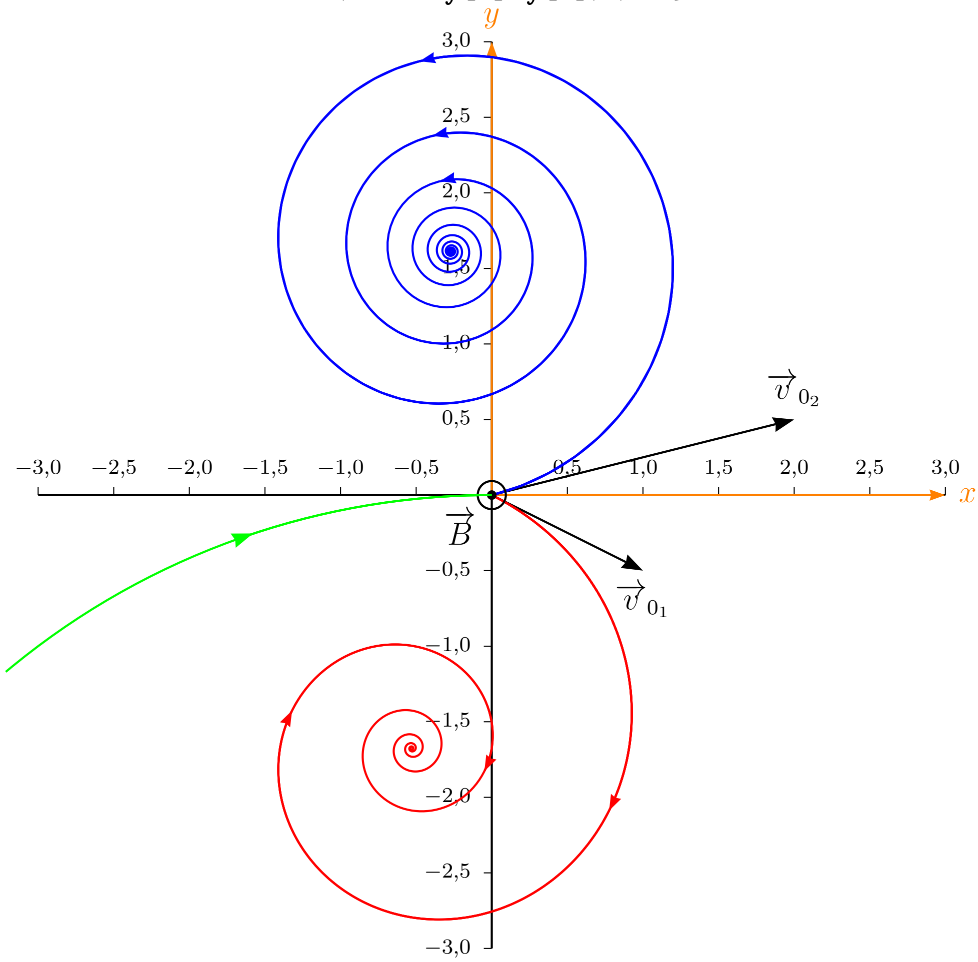
$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{q}{m}\overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{v} - \frac{\overrightarrow{v}}{\tau} \tag{1}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \ddot{x} & = & \omega\dot{y} - \dfrac{\dot{x}}{\tau} \\ \ddot{y} & = & -\omega\dot{x} - \dfrac{\dot{y}}{\tau} \end{array} \right. \tag{2}$$

2 Résolution numérique

```
                    %% x  y  x' y'
\newcommand{\InitCond}{ 0  0  5  15}
\newcommand{\OMEGA}{6.283185} % 2Pi
\newcommand{\TAU}{1}
```

```
\psplotDiffEqn[linecolor=red, plotpoints=1000]
     {0}{10}{\InitCond}{y[2]|y[3]|
                                   \OMEGA*y[3]-y[2]/\TAU|
                                  -\OMEGA*y[2]-y[3]/\TAU}
```



3 Résolution analytique

On peut écrire le système (2) sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\tau} & \omega \\ -\omega & -\frac{1}{\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

Nous cherchons les valeurs propres λ de la matrice. Son polynôme caractéristique s'écrit :

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{\tau} - \lambda & \omega \\ -\omega & -\frac{1}{\tau} - \lambda \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{\tau} - \lambda\right)^2 + \omega^2 = 0$$

Les racines sont : $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{\tau} \pm \jmath\omega$. Pour $\lambda_1 = -\frac{1}{\tau} + j\omega$, les vecteurs propres sont :

$$\begin{pmatrix} -\jmath\omega & \omega \\ -\omega & -\jmath\omega \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \jmath \end{pmatrix}$$

Soit :

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \quad \text{On pose } \xi = \dot{X}$$

$$\dot{\xi} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\tau} & \omega \\ -\omega & -\frac{1}{\tau} \end{pmatrix} \xi$$

Posons :

$$\tilde{\xi}(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \begin{pmatrix} \cos\omega t + j\sin\omega t \\ -\sin\omega t + j\cos\omega t \end{pmatrix}$$

Une combinaison linéaire donne les solutions pour ξ :

$$\xi(t) = C_1 \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ -\sin\omega t \end{pmatrix} + C_2 \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \begin{pmatrix} \sin\omega t \\ \cos\omega t \end{pmatrix}$$

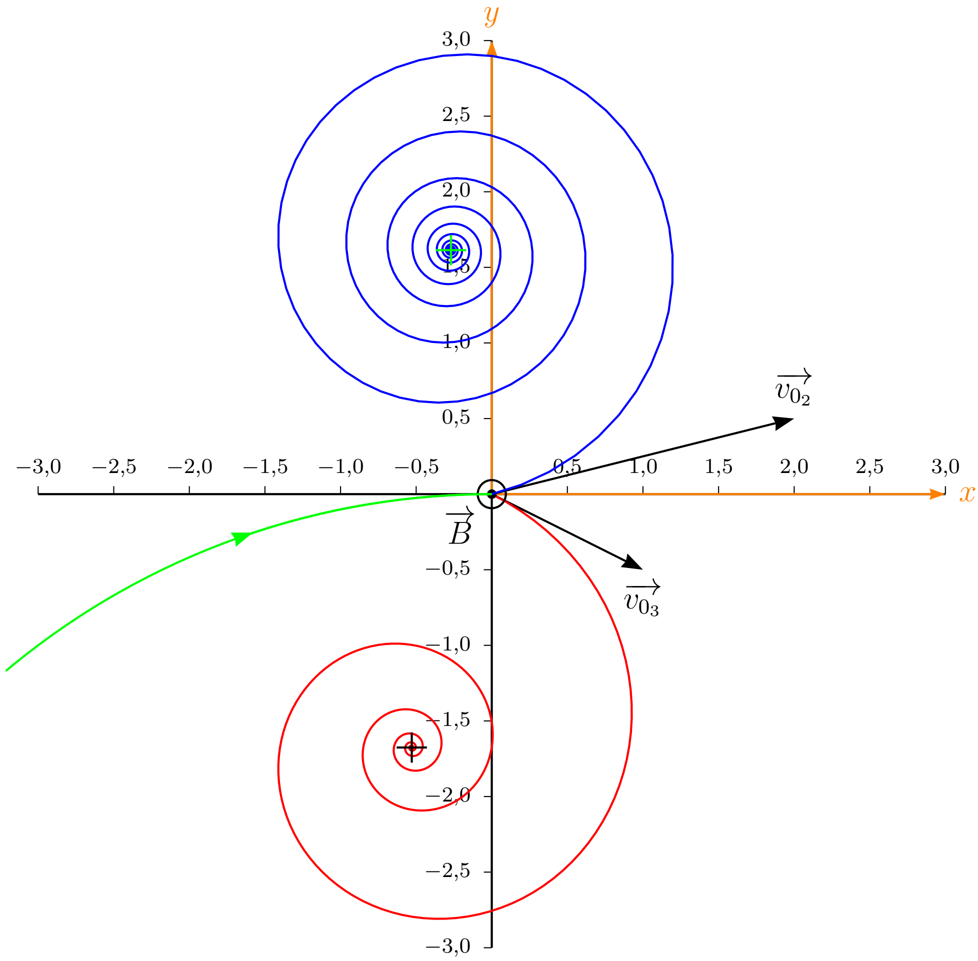
En intégrant, par rapport à t :

$$\begin{aligned} X &= \int \xi(t)\,\mathrm{d}t \\ &= C_1 \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{\tau}t}}{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\tau}\cos\omega t + \omega\sin\omega t \\ \frac{1}{\tau}\sin\omega t + \omega\cos\omega t \end{pmatrix} + C_2 \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{\tau}t}}{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\tau}\sin\omega t - \omega\cos\omega t \\ -\frac{1}{\tau}\cos\omega t + \omega\sin\omega t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Avec les conditions initiales suivantes : $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_{0,x}$, $\dot{y}(0) = v_{0,y}$,
on obtient finalement :

$$x(t) = \frac{\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \Big(-v_{0,x} \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} (\cos\omega t - \omega\tau\sin\omega t) - v_{0,y} \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} (\sin\omega t + \omega\tau\cos\omega t) + v_{0,x} + \omega\tau v_{0,y} \Big)$$

$$y(t) = \frac{\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \Big(v_{0,x} \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} (\sin\omega t + \omega\tau\cos\omega t) + v_{0,y} \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} (-\cos\omega t + \omega\tau\sin\omega t) + v_{0,y} - \omega\tau v_{0,x} \Big)$$



4 Détermination du point asymptote

On fait $t \to \infty$, alors $\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \to 0$.

$$\boxed{x_\infty = \frac{\tau}{1+\omega^2\tau^2}\Big(v_{0,x} + \omega\tau v_{0,y}\Big)}$$

$$\boxed{y_\infty = \frac{\tau}{1+\omega^2\tau^2}\Big(v_{0,y} - \omega\tau v_{0,x}\Big)}$$