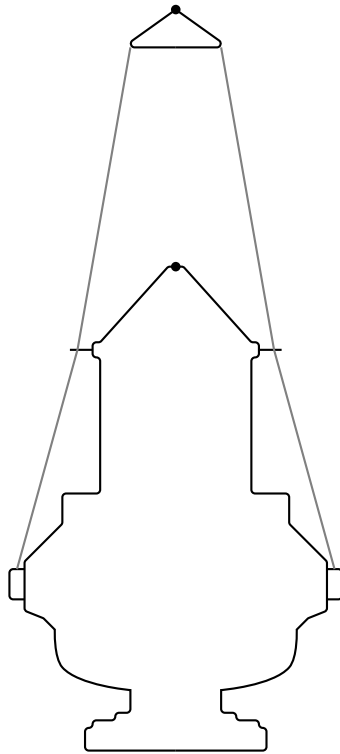
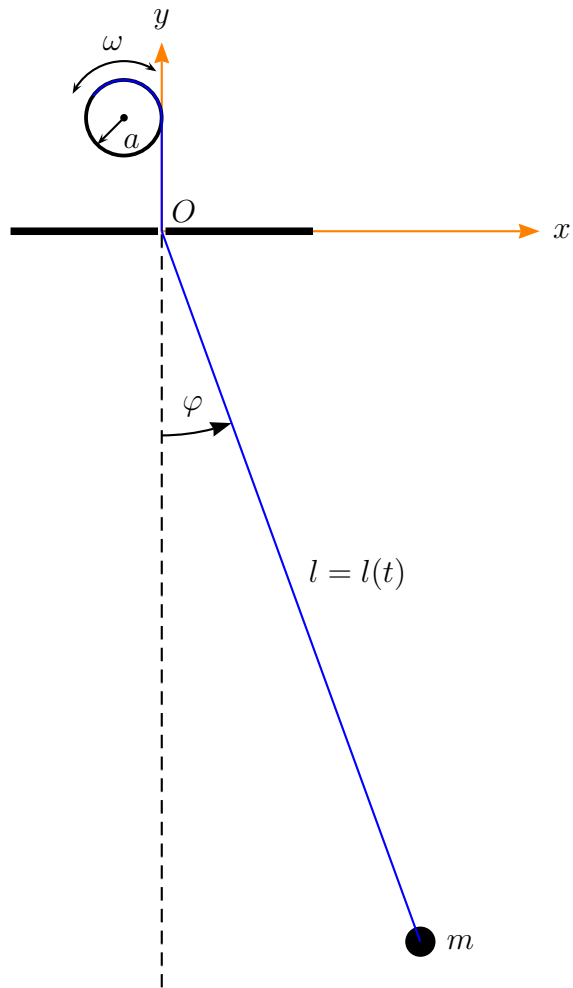


# 1 Botafumeiro – un pendule de longueur variable



Hauteur  $H \approx 1,50-1,60$  m  
Masse  $m \approx 54$  kg  
Longueur de corde  $l_0 \approx 30$  m  
Amplitude  $a \approx 2$  m (estimatif)



Les coordonnées de la masse  $m$

$$\begin{aligned}x &= l \sin \varphi \\y &= -l \cos \varphi\end{aligned}$$

L'oscillation de la suspension ( $a < l_0$ ):

$$l = l_0 + a \sin \omega t$$

Les dérivées par rapport au temps :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{l} \sin \varphi + l \dot{\varphi} \cos \varphi \\ \dot{y} &= -\dot{l} \cos \varphi + l \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{l} &= a \omega \cos \omega t\end{aligned}$$

L'énergie cinétique

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{l}^2 + l^2\dot{\varphi}^2) \\ &= \frac{1}{2}ma^2\omega^2 \cos^2 \omega t + \frac{1}{2}m(l_0 + a \sin \omega t)^2\dot{\varphi}^2\end{aligned}$$

L'énergie potentielle de pesanteur :

$$\begin{aligned}U &= mgy = -mgl \cos \varphi \\ &= -mg(l_0 + a \sin \omega t) \cos \varphi\end{aligned}$$

La fonction Lagrange :

$$\begin{aligned} L &= T - U \\ &= \frac{1}{2}ma^2\omega^2 \cos^2 \omega t + \frac{1}{2}m(l_0 + a \sin \omega t)^2\dot{\varphi}^2 + mg(l_0 + a \sin \omega t) \cos \varphi \end{aligned}$$

Pour  $\varphi$ ,  $\dot{\varphi}$ , on recoit

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= -mg(l_0 + a \sin \omega t) \sin \varphi \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m(l_0 + a \sin \omega t)^2\dot{\varphi} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= 2m\omega\dot{\varphi}(l_0 + a \sin \omega t) \cos \omega t + m(l_0 + a \sin \omega t)^2\ddot{\varphi} \end{aligned}$$

L'équation différentielle :

$$\ddot{\varphi} + \frac{2\omega\dot{\varphi} \cos \omega t + g \sin \varphi}{l_0 + a \sin \omega t} = 0$$