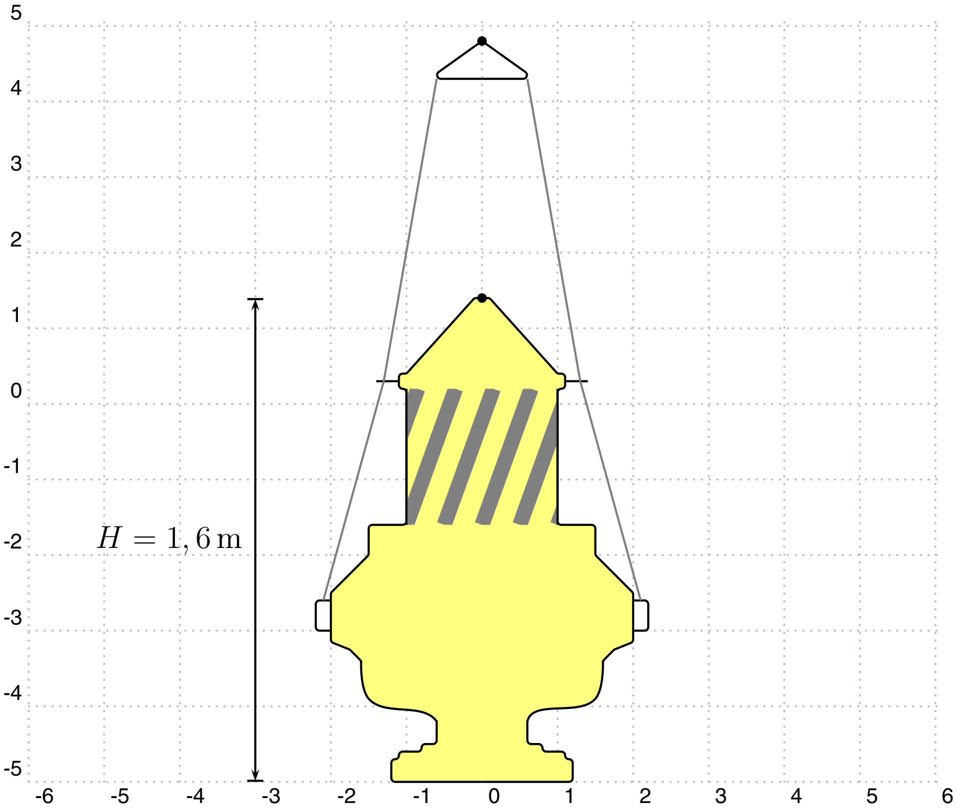
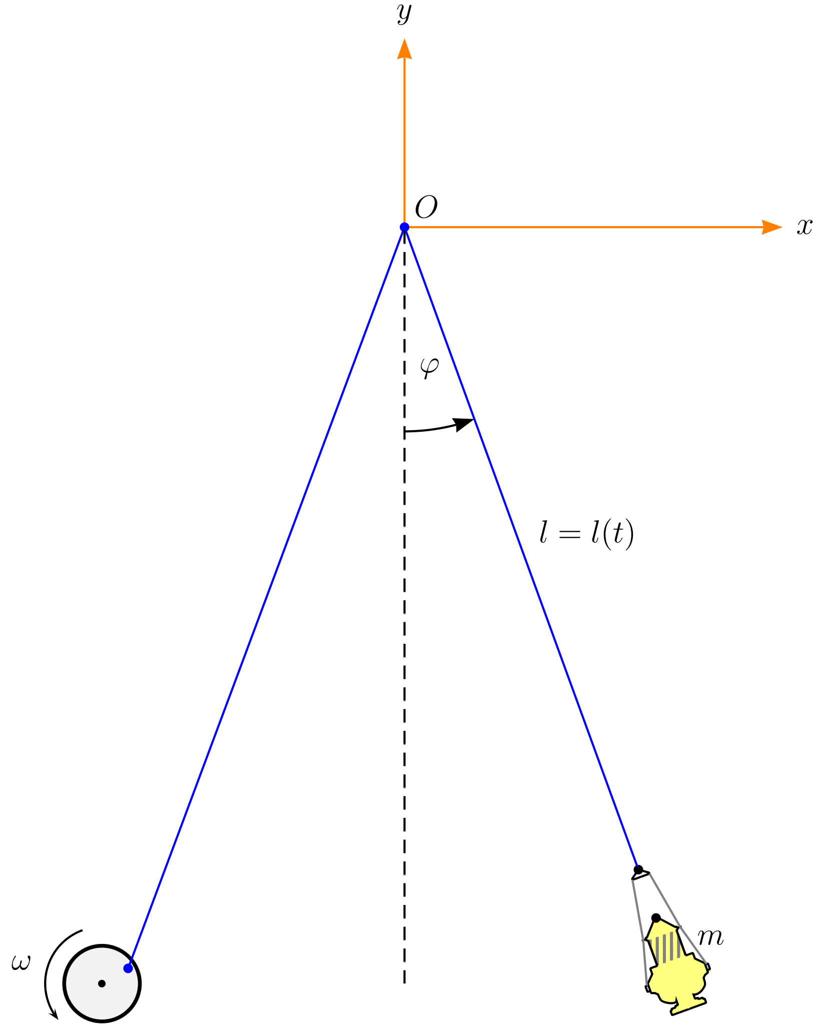
1 Le Botafumeiro – un oscillateur parametrique

Un des pendules le plus spéctaculaire est « Le Botafumeiro » de la cathédrale de Saint-Jacques-de-Compostelle. Il s'agit d'un encensoir des dimensions gigantesques. Il y en a des « Tiraboleiros » qui racourcissent le fil quand l'encensoir se déplace au point tout bas de son orbit, et puis ils enlongent le fil quand l'encensoir est au point de retour. Alors chaque fois les Tiraboleiros donnent de l'énergie au système oscillatoire, ca veut dire que l'angle de l'encensoir avec la verticale s'agrandit jusqu'à 80° et la vitesse en tout bas peut être $\approx 70\,\mathrm{km\,h^{-1}}$.

Une illustration expérimentale très simple est celle d'un pendule simple de longueur variable (donné par un tambour que tourne avec une vitesse angulaire ω constante).



Hauteur $H \approx$ 1,50-1,60 m
Masse $m \approx$ 54 kg
Longueur de corde $l_0 \approx$ 30 m
Amplitude $a \approx$ 2 m (estimatif)



Les coordonnées de la masse m

$$x = l \sin\varphi$$
$$y = -l \cos\varphi$$

L'oscillation de la suspension ($a < l_0$):

$$l = l_0 + a \sin\omega t$$

Les derivées par rapport au temps :

$$\dot{x} = \dot{l} \sin\varphi + l\dot{\varphi}\cos\varphi$$
$$\dot{y} = -\dot{l} \cos\varphi + l\dot{\varphi}\sin\varphi$$
$$\dot{l} = a\omega\cos\omega t$$

L'énergie cinétique

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{l}^2+l^2\dot{\varphi}^2)\\
&= \frac{1}{2}ma^2\omega^2\cos^2\omega t + \frac{1}{2}m(l_0+a\sin\omega t)^2\dot{\varphi}^2
\end{aligned}
$$

L'énergie potentielle de pesanteur :

$$
\begin{aligned}
U &= mgy = -mgl\cos\varphi\\
&= -mg(l_0+a\sin\omega t)\cos\varphi
\end{aligned}
$$

La fonction Lagrange :

$$
\begin{aligned}
L &= T-U\\
&= \frac{1}{2}ma^2\omega^2\cos^2\omega t + \frac{1}{2}m(l_0+a\sin\omega t)^2\dot{\varphi}^2 + mg(l_0+a\sin\omega t)\cos\varphi
\end{aligned}
$$

Pour φ, $\dot{\varphi}$, on recoit

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \varphi} &= -mg(l_0+a\sin\omega t)\sin\varphi\\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m(l_0+a\sin\omega t)^2\dot{\varphi}\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= 2m\omega\dot{\varphi}(l_0+a\sin\omega t)\cos\omega t + m(l_0+a\sin\omega t)^2\ddot{\varphi}
\end{aligned}
$$

Avec du frottement $F=\alpha v$ on a la fonction de dissipation

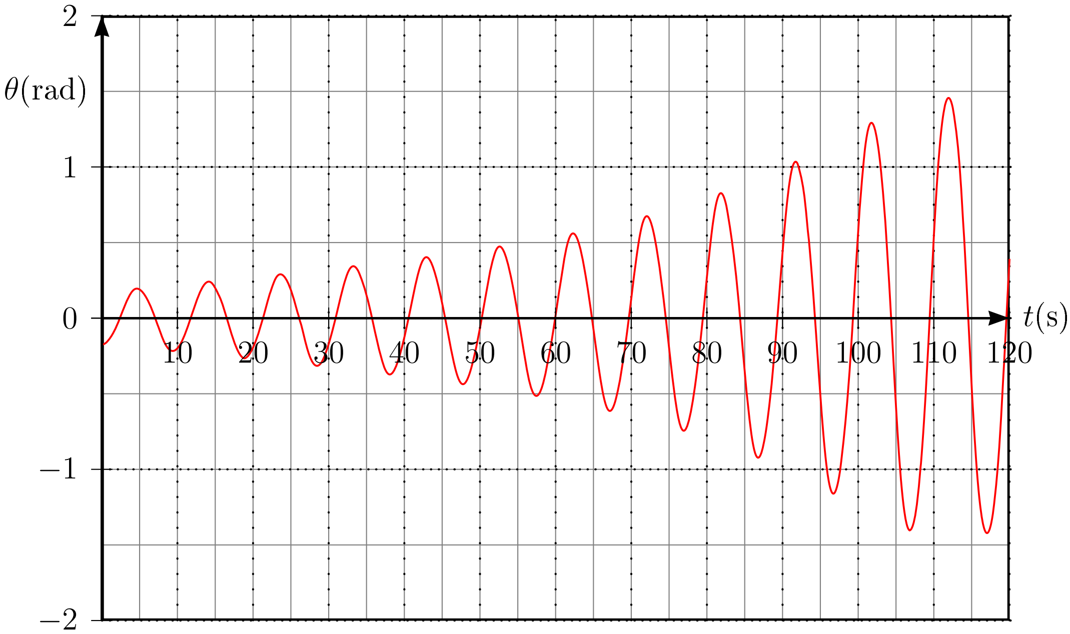
$$
D = \int_0^v h(v)\,\mathrm{d}v = \int_0^v \alpha v\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\alpha v^2 = \frac{1}{2}\alpha(a^2\omega^2\cos^2\omega t + (l_0+a\sin\omega t)^2\dot{\varphi}^2)
$$

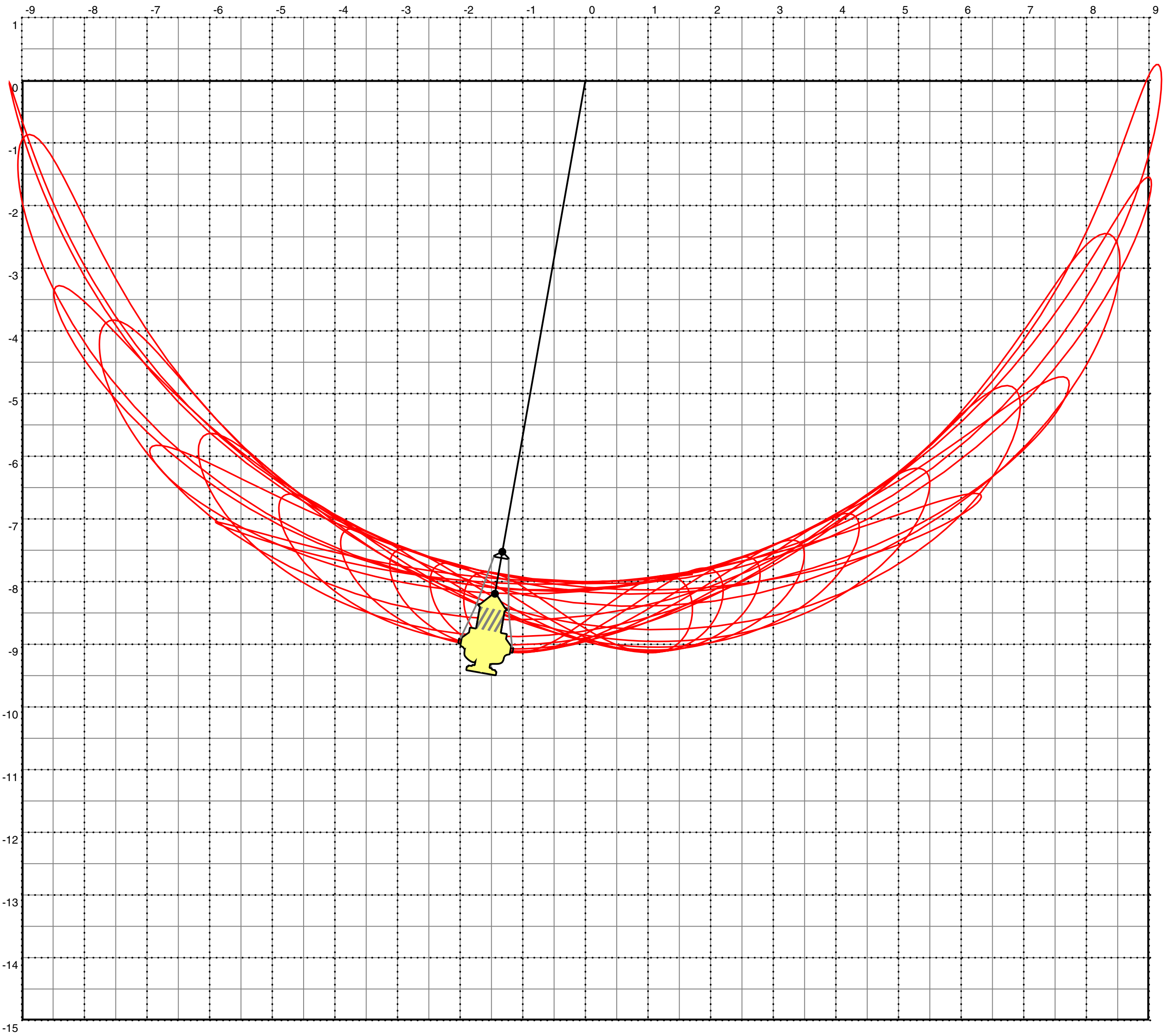
Le formalisme Lagrangienne donne:

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}} = 0
$$

L'équation différentielle :

$$
\boxed{\ddot{\varphi} + \frac{\alpha}{m}\dot{\varphi} + \frac{2\omega\dot{\varphi}\cos\omega t + g\sin\varphi}{l_0+a\sin\omega t} = 0}
$$


2
θ(rad)
1
0
−1
−2
t(s)
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120


-9
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10
-11
-12
-13
-14
-15