

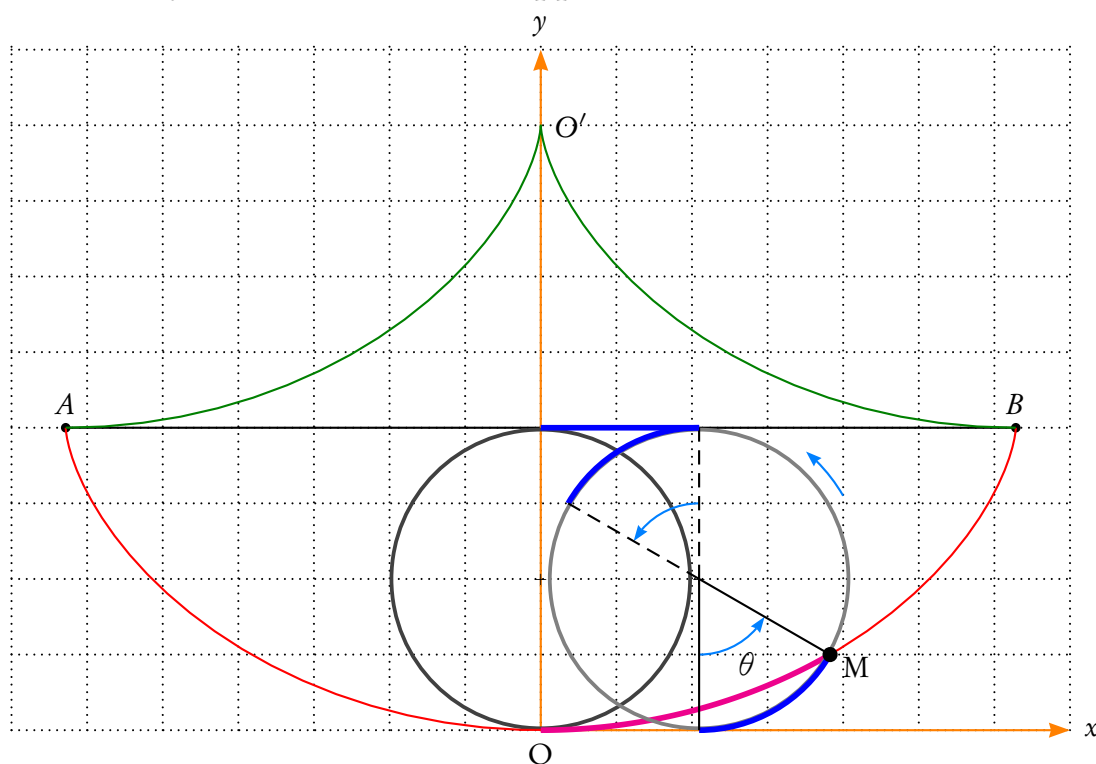
Pendule cycloïdal (Huygens)

25 avril 2012

Résumé

Voici(encore) une étude du célèbre pendule imaginé par Huygens, dont les oscillations sont rigoureusement isochrones. Son importance, dans l'histoire des sciences, est telle que les exposés l'ayant pris pour sujet sont innombrables. En particulier, Henri Bouasse en fait un exposé avec des calculs détaillés dans son livre "Pendule spiral, diapason", tome 1, pages 115, 116 et 117. Plus près de nous, Geneviève Tulloué a réalisé une belle animation et un magnifique travail sur ce sujet ¹.

1 Étude de la cycloïde et de sa développée



Équations paramétriques de la cycloïde AOB (en rouge), dans le repère Oxy choisi (pour des raisons de symétrie), θ variant entre $-\pi$ et π , $\theta = -\pi$ lorsque le cercle est en contact avec A, $\theta = \pi$ au point B et $\theta = 0$ en O. R est le rayon du cercle générateur qui roule sur AB. Le point du cercle choisi, qui décrit la cycloïde, est celui qui est en contact avec O lorsque $\theta = 0$.

$$\begin{cases} x = R(\theta + \sin \theta) \\ y = R(1 - \cos \theta) \end{cases}$$

$$dx = R(1 + \cos \theta)d\theta, \quad dy = R \sin \theta.d\theta,$$

Déplacement élémentaire sur la cycloïde :

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = 2R \cos \frac{\theta}{2}.d\theta$$

1. http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/pend_cyclo.html

Abscisse curviligne $s = \widehat{OM}$, en prenant comme origine O et les conditions suivantes : lorsque $\theta = 0$ alors $s_0 = 0$ et l'orientation positive est dans le sens \widehat{AOB} .

$$s = \widehat{OM} = 4R \sin \frac{\theta}{2}$$

On remarque que la distance $AB = 2\pi R$ (périmètre du cercle) et que la longueur de l'arche (inversée) de cycloïde de A à B vaut : $\widehat{AOB} = 8R$.

Déterminons le rayon de courbure en chaque point de l'arche de la cycloïde, en fonction de θ . Calculons, d'abord la pente de la tangente :

$$\tan \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$$

Utilisons les relations suivantes :

$$\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}, \quad 1 + \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2},$$

Pour en déduire :

$$\tan \varphi = \tan \frac{\theta}{2}$$

D'autre part :

$$\frac{ds}{d\theta} = 2R \cos \frac{\theta}{2}$$

$$R_C = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{ds}{d\theta} \frac{d\theta}{d\varphi} = 4R \cos \frac{\theta}{2}$$

Calculons les coordonnées du centre de courbure Ω . Pour cela, il faut calculer les coordonnées du vecteur unitaire normal \vec{n} à la cycloïde. $\vec{\tau}$ est le vecteur unitaire tangent.

$$\vec{\tau} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\vec{\tau} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

Centre de courbure :

$$\begin{cases} x_\Omega = x + R_C n_x \\ y_\Omega = y + R_C n_y \end{cases} \quad \begin{cases} x_\Omega = R(\theta + \sin \theta) - 4R \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\ y_\Omega = R(1 - \cos \theta) + 4R \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \end{cases}$$

On obtient, après simplification :

$$\begin{cases} x_\Omega = R(\theta - \sin \theta) \\ y_\Omega = R(3 + \cos \theta) \end{cases}$$

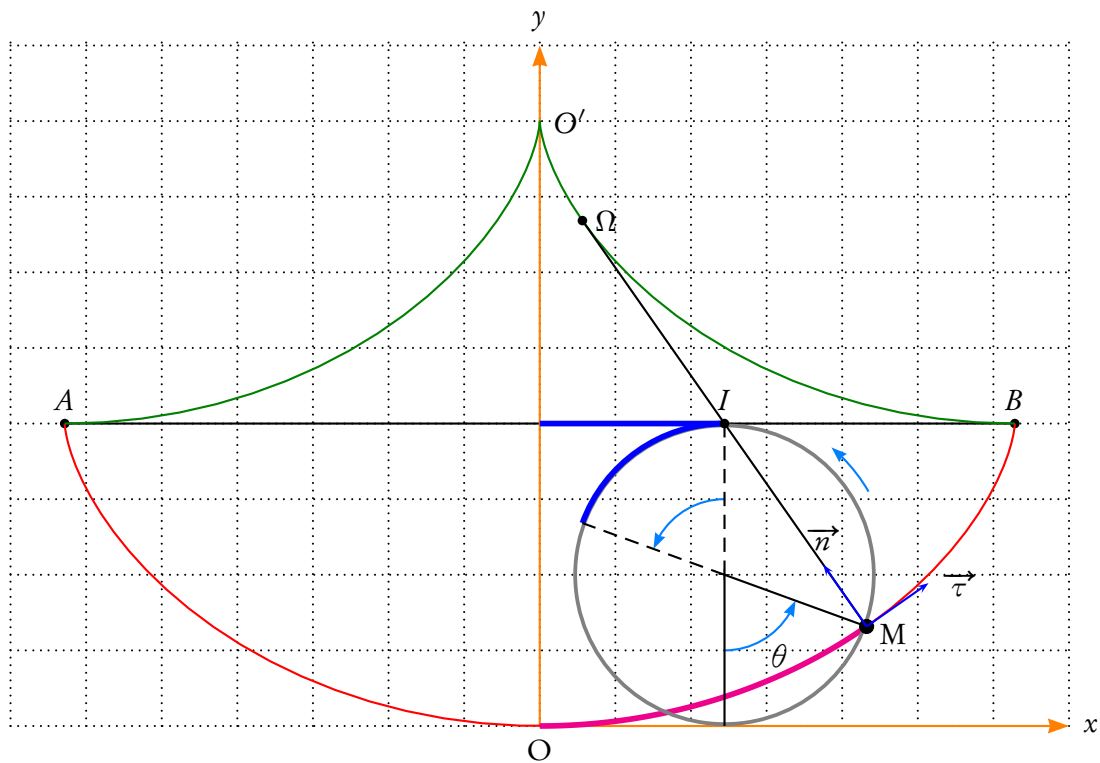
Ce sont les équations paramétriques de la développée de la cycloïde initiale, elle est dessinée en vert foncé sur le premier schéma. On peut remarquer qu'elle peut être obtenue à partir de la première par les transformations suivantes :

1. $\theta \implies (\theta - \pi)$;
2. $x \implies x(\theta - \pi) + \pi R$;
3. $y \implies y(\theta - \pi) + 2R$

C'est une cycloïde de mêmes caractéristiques, qui peut donc être déduite de la précédente par une translation.

2 Une animation : la cycloïde avec le cercle générateur

3 Centre de courbure, rayon de courbure et développée



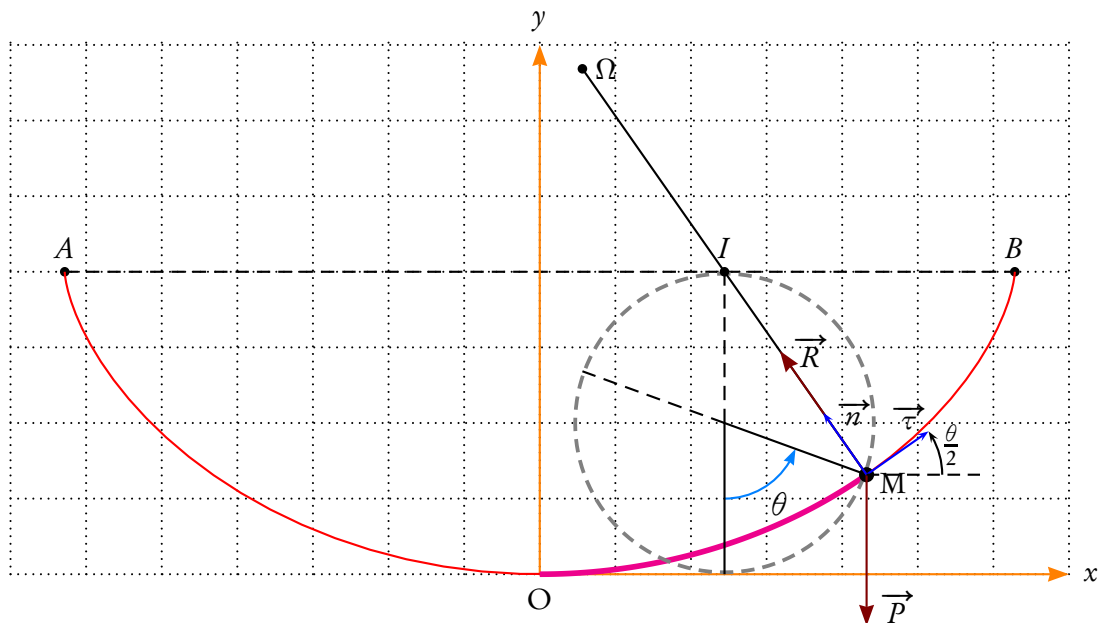
On remarque que le rayon de courbure ΩM passe par I , point de contact du cercle générateur avec Ox qui est la droite sur laquelle roule le cercle. Il est facile de vérifier que I est le milieu de ΩM .

$$\begin{cases} x_I = \frac{x + x_\Omega}{2} = \frac{R(\theta + \sin \theta) + R(\theta - \sin \theta)}{2} = R\theta \\ y_I = \frac{y + y_\Omega}{2} = \frac{R(1 - \cos \theta) + R(3 + \cos \theta)}{2} = 2R \end{cases}$$

4 Une animation : développée de la cycloïde

5 Mouvement d'un mobile ponctuel glissant sans frottement sur la cycloïde

5.1 Étude théorique



En projetant la relation fondamentale de la dynamique sur la tangente orientée, on obtient :

$$-m g \sin \frac{\theta}{2} = m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

Or, nous savons que $s = \widehat{OM} = 4R \sin \frac{\theta}{2}$. L'équation différentielle du mouvement, en fonction de l'abscisse curviligne s , s'écrit :

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{g}{4R} s = 0$$

C'est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique, de pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{4R}}$. La période

$T = 4\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$ ne dépend pas des conditions initiales. On remarquera qu'elle est identique à celle des oscillations de faible amplitude d'un pendule simple de longueur $l = 4R$. Les oscillations sont *isochrones*. La solution générale s'écrit, par exemple :

$$s = a \cos(\omega_0 t + \varepsilon)$$

a et ε sont à déterminer suivant les conditions initiales.

On peut donc prévoir, que deux petites billes lâchées, au même instant, mais à des hauteurs différentes sur la cycloïde se croiseront, où se dépasseront, au même instant au plus bas de la trajectoire. Ceci illustre la propriété que la cycloïde est une courbe *tautochrone*.

Pour déterminer la position de la bille à un instant t , on commence par calculer $s(t)$, puis $\theta = 2 \arcsin \left(\frac{s}{4R} \right)$.

Supposons que la bille est lâchée à l'instant $t = 0$, sans vitesse initiale, du point de la cycloïde correspondant à θ_0 . On peut en déduire l'abscisse curviligne $s(0) = 4R \sin \frac{\theta_0}{2}$. Dans ce cas, l'équation du mouvement s'écrit :

$$s = s(0) \cos \omega_0 t$$

Le mouvement étant périodique, il suffit de connaître la position de la bille pour $0 \leq t < T$. D'une valeur quelconque de t on peut en déduire $s(t)$ et de celle-ci la valeur de $\theta(t) = 2 \arcsin \left(\frac{s(t)}{4R} \right)$. Les équations paramétriques de la cycloïde permettent de placer la bille à l'instant choisi.

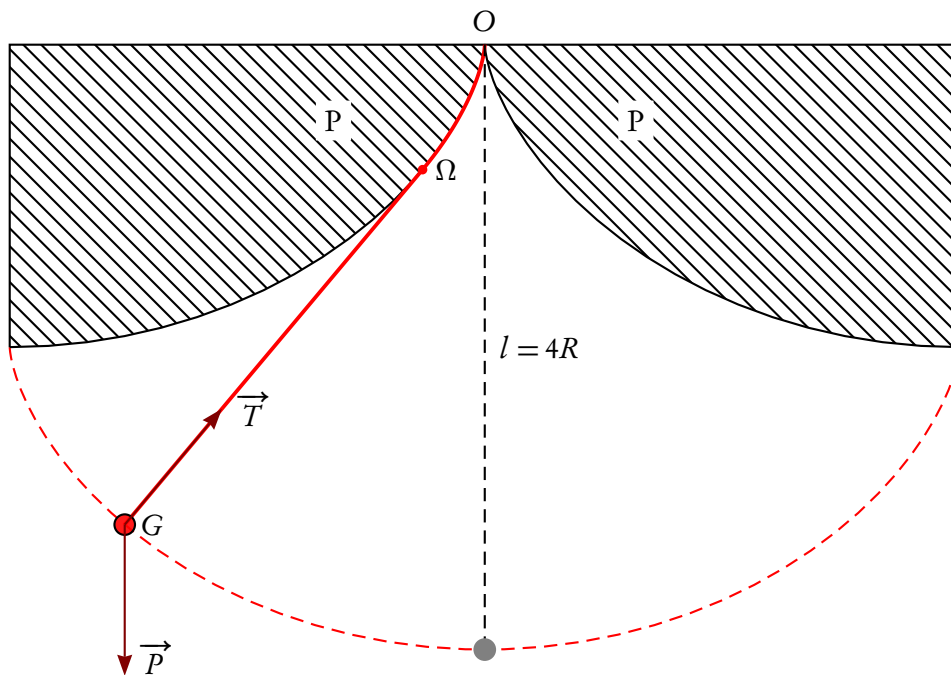
5.2 Une animation

On donne le rayon du cercle générateur de la cycloïde R et l'angle θ_0 fixant la position initiale de la bille. L'intervalle de temps entre deux positions est $dt = 0,1$ s, la période étant égale à 5,67 s, le nombre d'images calculées est 57.

6 Le pendule cycloïdal de Huygens

6.1 Le principe

Le point de suspension est le point de rebroussement de la développée. Le fil a une longueur égale à 4 fois le rayon du cercle générateur $l = 4R$. Ce fil est supposé de masse négligeable et le solide de masse m attaché à l'autre extrémité est supposé ponctuel. Les deux *joues* de la développée sont découpées dans une plaque rigide. Lorsque le pendule oscille le fil s'appuie sur une longueur $\widehat{O\Omega}$ sur la développée, l'autre partie du fil ΩG est tangente à la développée, et ainsi G est astreint à décrire l'arc de cycloïde. Par rapport au problème de la bille ponctuelle glissant sur la cycloïde, la réaction du support est remplacée par la tension du fil, la cycloïde devient inutile. Dans ces conditions parfaites, le pendule effectue des oscillations isochrones de période $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.



6.2 Une animation avec deux pendules

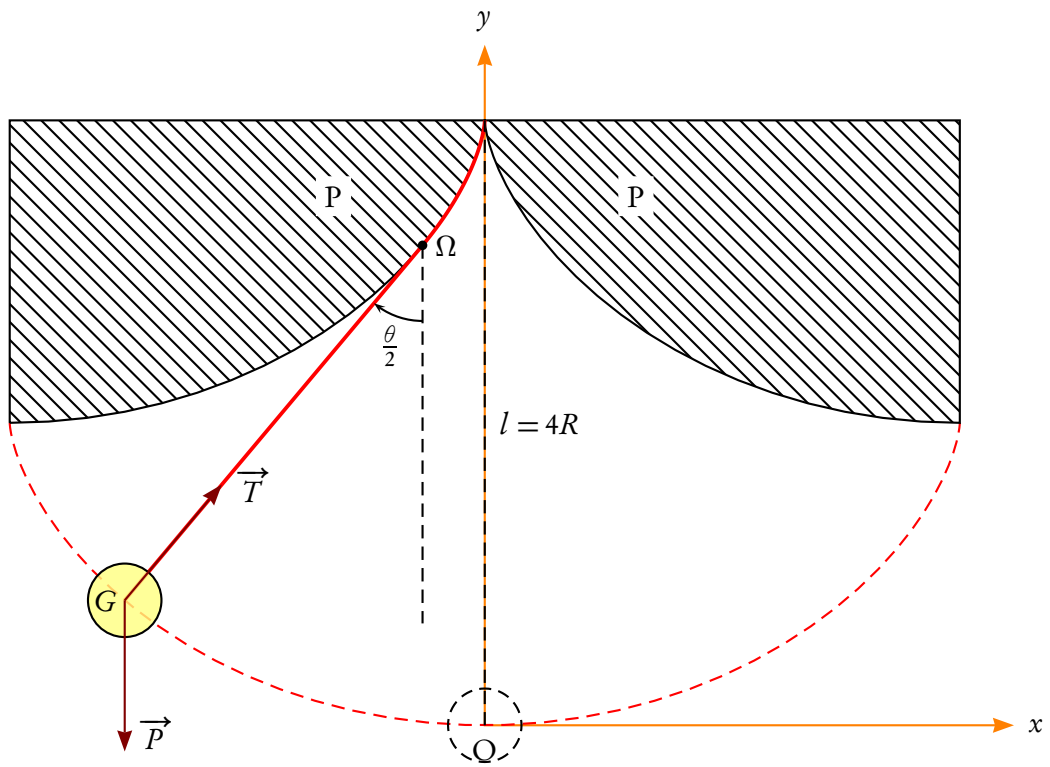
6.3 L'opinion d'Henri Bouasse

« Pour remarquable que soit la solution donnée par Huygens au problème de l'isochronisme, l'expérience a montré qu'elle ne valait rien comme trop compliquée. On l'abandonna du vivant d'Huygens. Il est difficile de donner aux plaques (P) la forme théorique, même en traçant mécaniquement leur profil. Les fils toujours plus ou moins rigides ne s'appliquent pas exactement sur les courbes. En fil ou en soie, ils se raccourcissent par l'humidité et s'allongent par la sécheresse. »

6.4 Les oscillations sont-elles vraiment isochrones ?

Henri Bouasse pose la questions suivante :

« Cherchons ce que devient l'isochronisme quand on suppose la masse m non très petite : nous admettrons que son centre d'inertie décrit la cycloïde. » On considère donc que la lentille du pendule n'est plus un objet ponctuel : par exemple un disque de laiton de rayon r .



Énergie cinétique avec J_C moment d'inertie de la lentille par rapport à G :

$$\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}(J_G + mR_C^2) \frac{\dot{\theta}^2}{4}$$

On rappelle que :

$$R_C = \frac{ds}{d\varphi} \implies ds = R_C \frac{d\theta}{2}$$

d'où :

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\theta}{dt} R_C \implies \frac{\dot{\theta}^2}{4} = \frac{\dot{s}^2}{R_C^2}$$

En remplaçant dans l'expression de l'énergie cinétique, nous obtenons celle-ci en fonction de l'abscisse curviligne $s = \widehat{OG}$.

$$\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}(J_G + mR_C^2) \frac{\dot{s}^2}{R_C^2}$$

Énergie potentielle de pesanteur :

$$\mathcal{E}_p = m g y_G = m g R(1 - \cos\theta)$$

En utilisant la relation $1 - \cos\theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$, \mathcal{E}_p s'écrit :

$$\mathcal{E}_p = 2 m g R \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

Nous avons déjà établi que : $s = \widehat{OG} = 4R \sin \frac{\theta}{2}$, d'où :

$$\mathcal{E}_p = \frac{m g}{8R} s^2$$

Employons le formalisme Lagrangien :

$$L = \mathcal{E}_C - \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}(J_G + mR_C^2) \frac{\dot{s}^2}{R_C^2} - \frac{m g}{8R} s^2$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial s} &= -\frac{mg}{4R}s \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} &= (J_G + mR_C^2)\dot{s} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} &= (J_G + mR_C^2)\ddot{s} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} &= m\left(\frac{J_G}{mR_C^2} + 1\right)\dot{s} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} &= m\left(\frac{J_G}{mR_C^2} + 1\right)\ddot{s} \end{aligned}$$

Équation de Lagrange :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} &= \frac{\partial L}{\partial s} \\ \left(\frac{J_G}{mR_C^2} + 1\right)\ddot{s} + \frac{g}{4R}s &= 0 \end{aligned}$$

Le rayon de courbure R_C dépend de la position de G sur la cycloïde, donc le moment d'inertie $J_G + mR_C^2$ aussi. $s(t)$ n'obéit plus à l'équation d'un oscillateur harmonique. Les oscillations ne sont plus synchrones. On retrouve, évidemment, les solutions du pendule ponctuel en faisant $J_G = 0$.