

Pendule élastique vertical

7 juin 2012

1 Introduction

Gilbert Gastebois, dans une étude remarquable sur le pendule élastique¹, commence par cette très judicieuse remarque :

« Tout élève qui a mesuré la période d'un pendule élastique a été confronté à un problème irritant : pour certaine valeur de la masse accrochée au pendule et malgré tout le soin mis à le faire osciller verticalement, le pendule se met à balancer de droite à gauche avant de revenir à la verticale, puis à se remettre à balancer et ainsi de suite.

On interprète souvent ce phénomène par un couplage entre l'oscillation verticale et latérale qui se traduirait par des battements, mais si c'était le cas, cela devrait toujours exister car les deux périodes sont toujours assez proches, or le phénomène n'existe que pour des masses voisines de la valeur qui donne une fréquence verticale double de la fréquence latérale. »

L'étude des oscillations du pendule est très complète dans le document de Gilbert Gastebois, aussi nous vous invitons à vous y reporter car elle est vraiment unique : impossible de trouver mieux sur le Web ! C'est pourquoi nous n'écrirons que les calculs aboutissant à l'établissement des équations différentielles indispensables à la simulation du phénomène.

Je rappelle que but premier de tous les documents de ce site est d'illustrer un phénomène physique par l'utilisation de PSTricks et du package `animate`. La résolution numérique des équations différentielles est faite avec la macro `\psplotDiffEqn` du package `pstricks-add`. **Un point très important** : les données sont écrites dans un fichier sur le disque, mais cela ne peut se passer correctement que par la modification dans le fichier `pstricks-add.tex` de la ligne 1600 :

```
\addto@pscode{\ifPst@saveData Pst@data closefile \fi}
```

Que l'on remplacera par celle-ci :

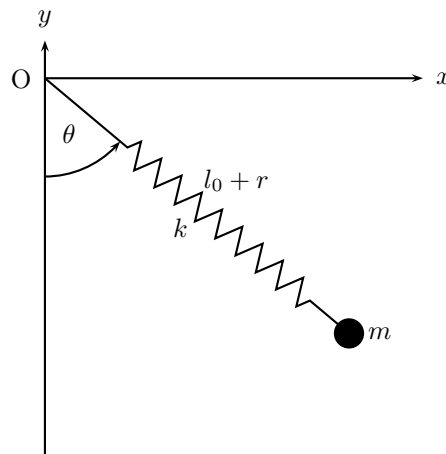
```
%\addto@pscode{\ifPst@saveData Pst@data closefile \fi}
```

Le % permettant de désactiver cette commande.

Nous donnerons à la fin du document des détails sur l'utilisation de la macro `\psplotDiffEqn`.

2 Le pendule élastique

2.1 Équations différentielles



1. http://gilbert.gastebois.pagesperso-orange.fr/java/pend_danse/theorie_pendule_dansant.htm

Données : l_0 est la longueur initiale du ressort (non étiré ni comprimé) et r son allongement (ou son raccourcissement). À un instant quelconque les coordonnées de G , centre de masse de l'objet attaché à l'extrémité libre du ressort, sont :

$$\begin{aligned}x &= (l_0 + r) \sin \theta \\y &= -(l_0 + r) \cos \theta\end{aligned}$$

On suppose l'objet ponctuel et les frottements négligeables.

Coordonnées de la vitesse :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{r} \sin \theta + (l_0 + r) \dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{y} &= -\dot{r} \cos \theta + (l_0 + r) \dot{\theta} \sin \theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= (\dot{r} \sin \theta + (l_0 + r) \dot{\theta} \cos \theta)^2 + (-\dot{r} \cos \theta + (l_0 + r) \dot{\theta} \sin \theta)^2 \\ &= \dot{r}^2 + (l_0 + r)^2 \dot{\theta}^2\end{aligned}$$

Énergie cinétique :

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + (l_0 + r)^2 \dot{\theta}^2)\end{aligned}$$

Énergie potentielle de pesanteur et élastique :

$$\begin{aligned}U &= \frac{1}{2} k r^2 + m g y \\ &= \frac{1}{2} k r^2 - m g (l_0 + r) \cos \theta\end{aligned}$$

Lagrangien du système :

$$\begin{aligned}L &= T - U \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + (l_0 + r)^2 \dot{\theta}^2) - \frac{1}{2} k r^2 + m g (l_0 + r) \cos \theta\end{aligned}$$

Pour la variable θ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \theta} &= -m g (l_0 + r) \sin \theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= m (l_0 + r)^2 \dot{\theta} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= 2m (l_0 + r) \dot{r} \dot{\theta} + m (l_0 + r)^2 \ddot{\theta}\end{aligned}$$

l'équation de Lagrange s'écrit :

$$m (l_0 + r)^2 \ddot{\theta} + 2m (l_0 + r) \dot{r} \dot{\theta} + m g (l_0 + r) \sin \theta = 0$$

Soit en divisant par $m (l_0 + r)^2$

$$\ddot{\theta} + \frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{l_0 + r} + \frac{g}{l_0 + r} \sin \theta = 0$$

Pour la variable r :

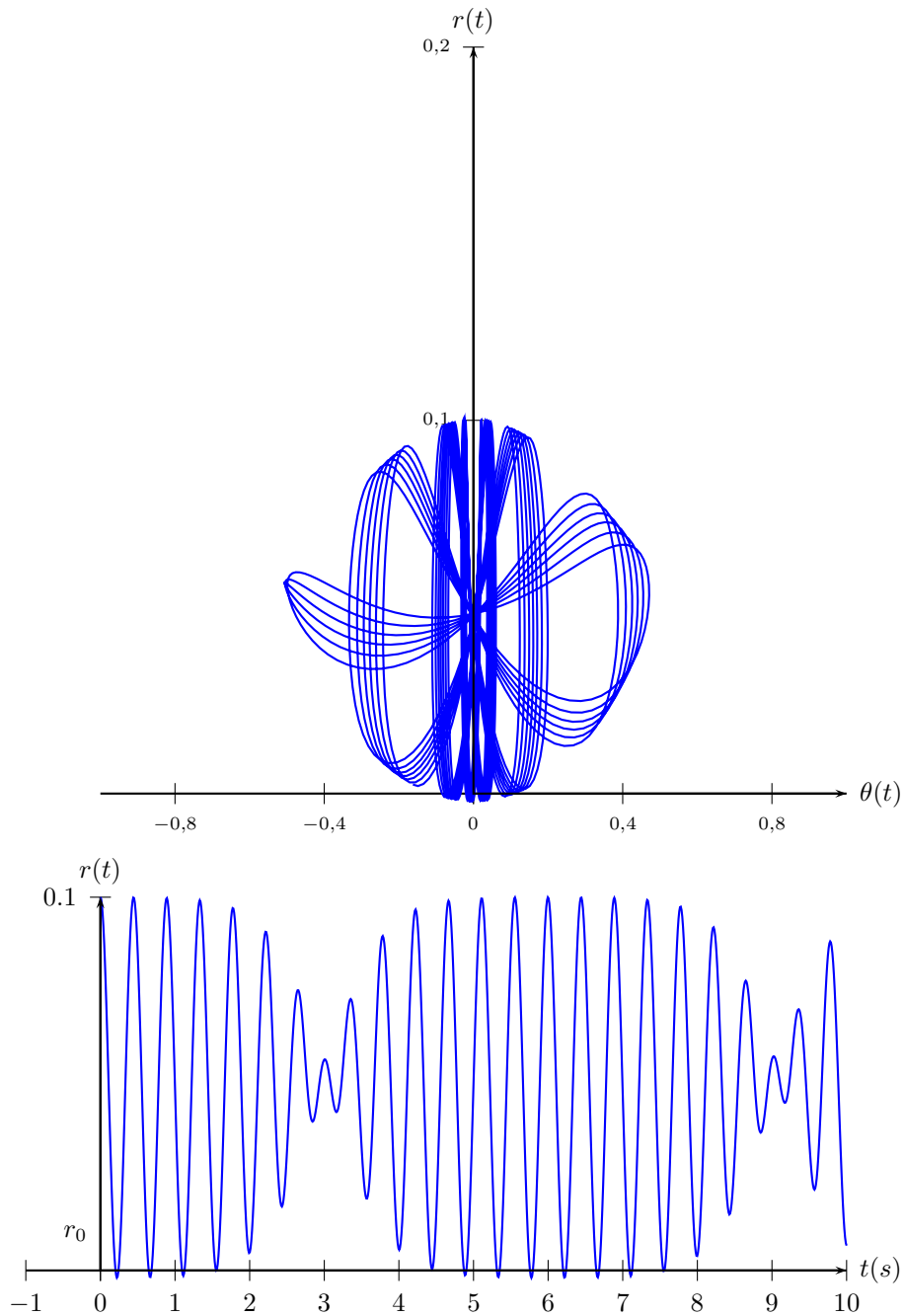
$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial r} &= m (l_0 + r) \dot{\theta}^2 - k r + m g \cos \theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= m \dot{r} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= m \ddot{r} \\ m \ddot{r} - m (l_0 + r) \dot{\theta}^2 + k r - m g \cos \theta &= 0\end{aligned}$$

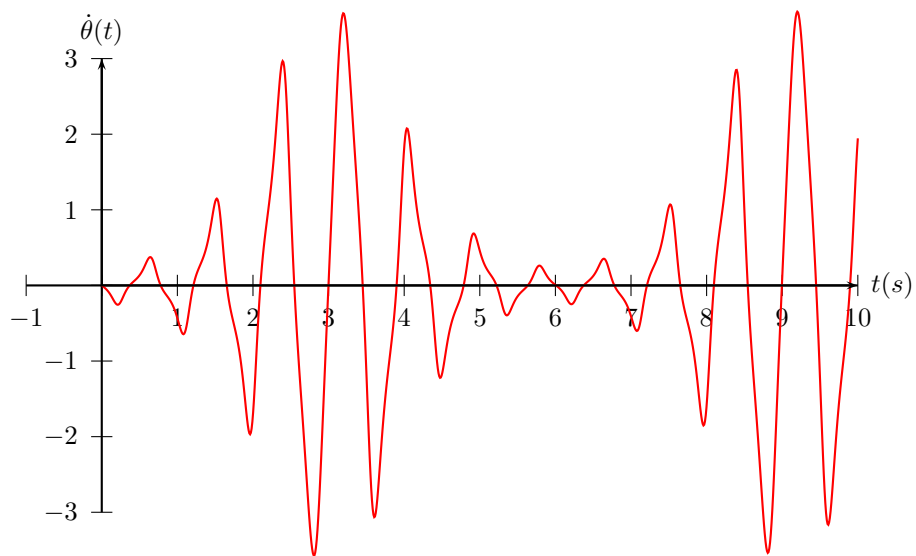
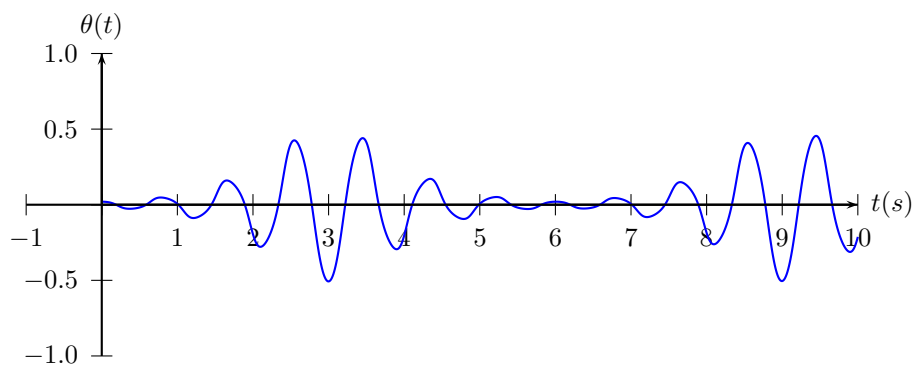
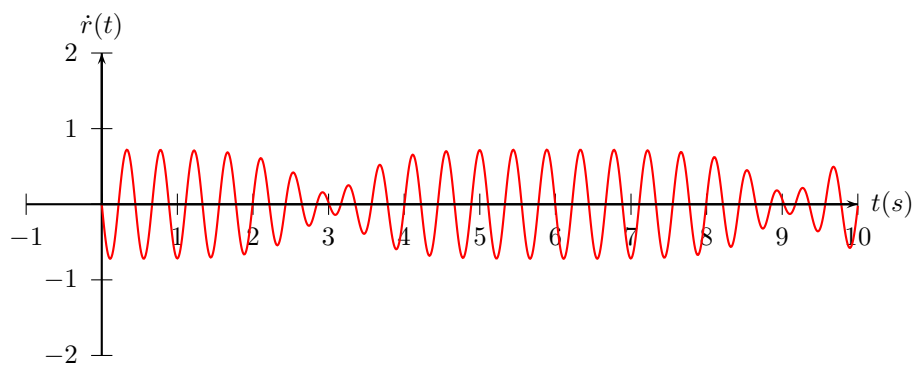
$$\ddot{r} - (l_0 + r) \dot{\theta}^2 + \frac{k}{m} r - g \cos \theta = 0$$

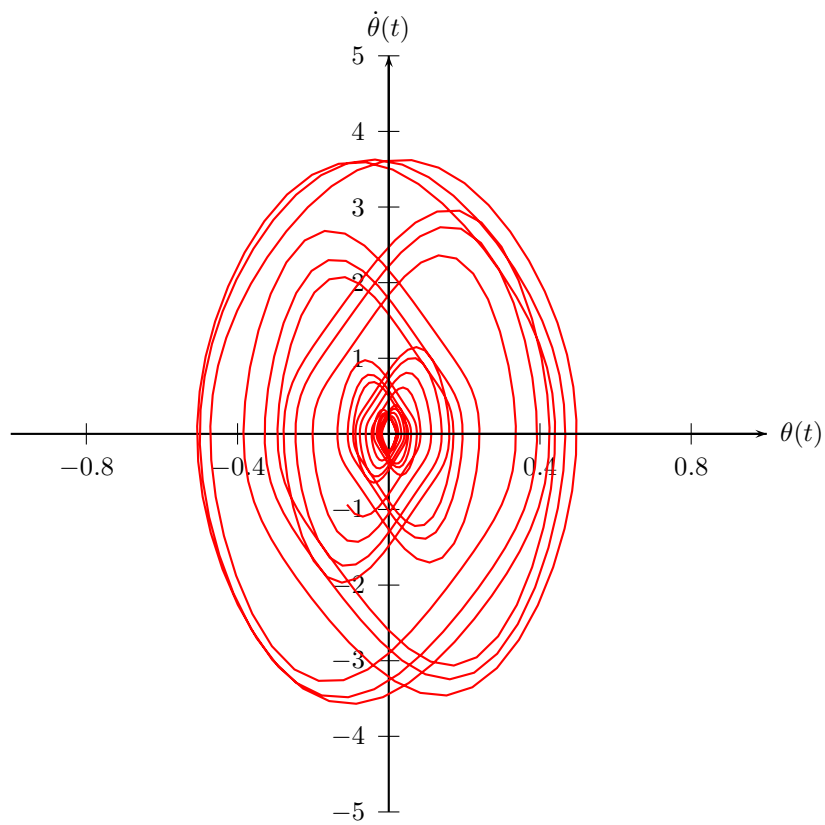
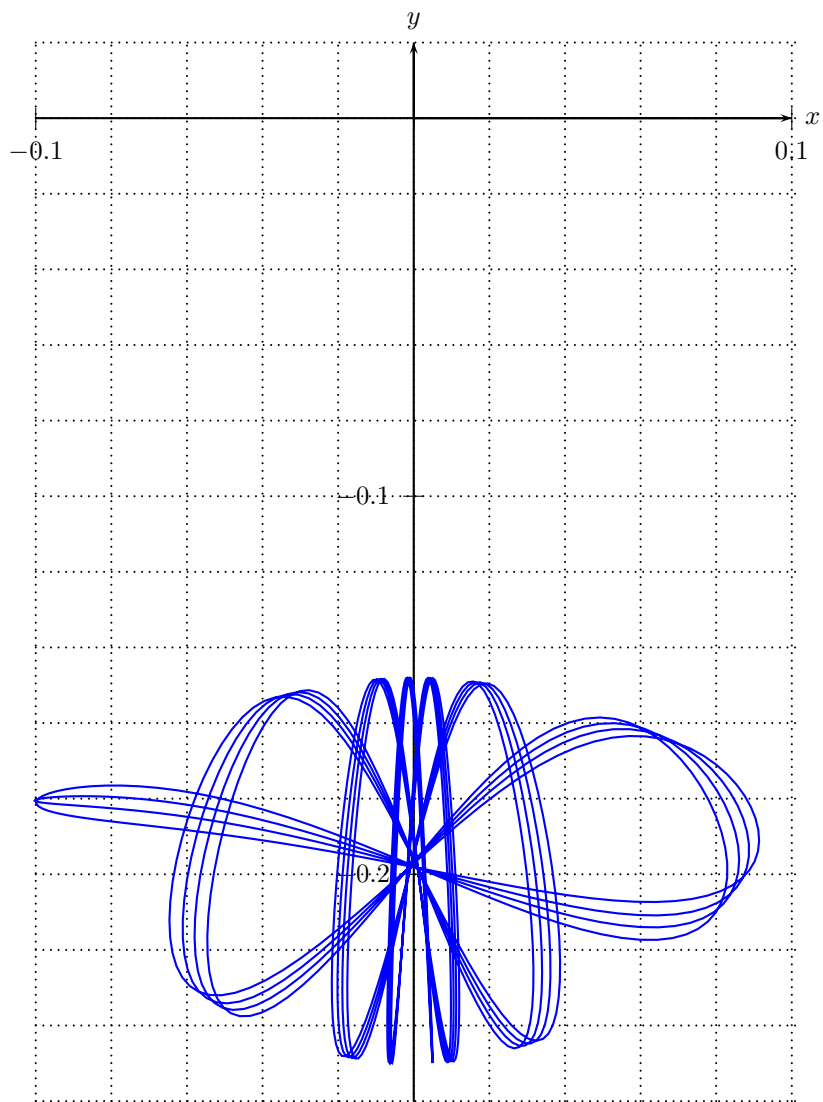
3 Les courbes

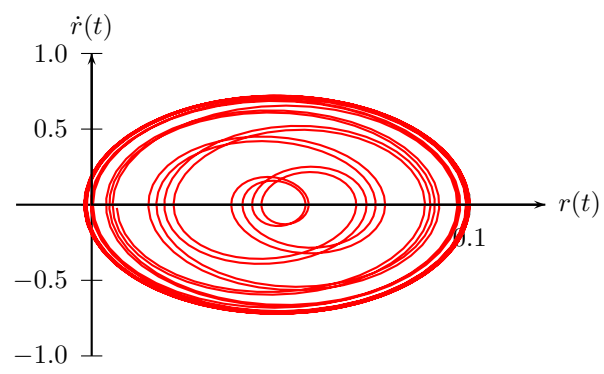
Toutes les courbes ci-après ont été obtenues avec les données suivantes, qui sont celles choisies par Gilbert Gastebois pour son animation :

```
\newcommand\parameters{ % Gastebois
  /M1 0.1 def % masse en kg
  /l0 0.15 def % longueur à vide en m
  /K 20 def % raideur du ressort en N/m
  /G 9.8 def
  /r0 0.1 def % élongation initiale du ressort en m
  /theta0 0.02 def % angle initial en rad
% pulsation du pendule élastique sqrt(K/m)
  /wr K M1 div def % wr^2
}%
```









4 L'animation

5 Les macros de PSTricks

Les courbes et l'écriture du fichier de données (x, y) pour l'animation sont réalisées par la macro de `pstricks-add` : `\psplotDiffEqn`. En notation algébrique, nous écrivons :

```
\newcommand\SpringPendulum{
y[2] |
y[3] |
(10+y[0])*y[3]^2+G*cos(y[1])-wr*y[0] |
-2*y[2]*y[3]/(10+y[0])-G*sin(y[1])/(10+y[0])
}
\newcommand\conditionsInitiales{r0 theta0 0 0}
```

Sur la pile, les grandeurs sont stockées dans cet ordre :

```
y[0] y[1]   y[2] y[3]
r   theta  r'  theta'
```

La sauvegarde des données pour l'animation se fait avec l'option `saveData` :

```
\begin{center}
\begin{pspicture}(-5,-13)(5,1)
\psgrid[subgriddiv=0,griddots=10,gridlabels=0pt](-5,-13)(5,1)
\psaxes[dx=5,Dx=0.1,dy=5,Dy=.1](0,0)(-5,-13)(5,1)
\uput[r](5,0){$x$}
\uput[u](0,1){$y$}
\psline{<->}(5,0)(0,0)(0,1)
\pstVerb{ /Pi 3.1415926 def
/deg2rad {180 div Pi mul} def
/rad2deg {180 mul Pi div} def
\parameters}%
\psplotDiffEqn[plotfuncx=y dup 0 get 10 add exch 1 get rad2deg sin mul,
plotfuncy=dup 0 get 10 add exch 1 get rad2deg cos mul neg,
linecolor=blue, method=rk4,unit=50,
saveData,filename=SPXYG.dat,
plotpoints=1200,algebraic]{0}{12}{\conditionsInitiales}{\SpringPendulum}
\end{pspicture}
\end{center}
```