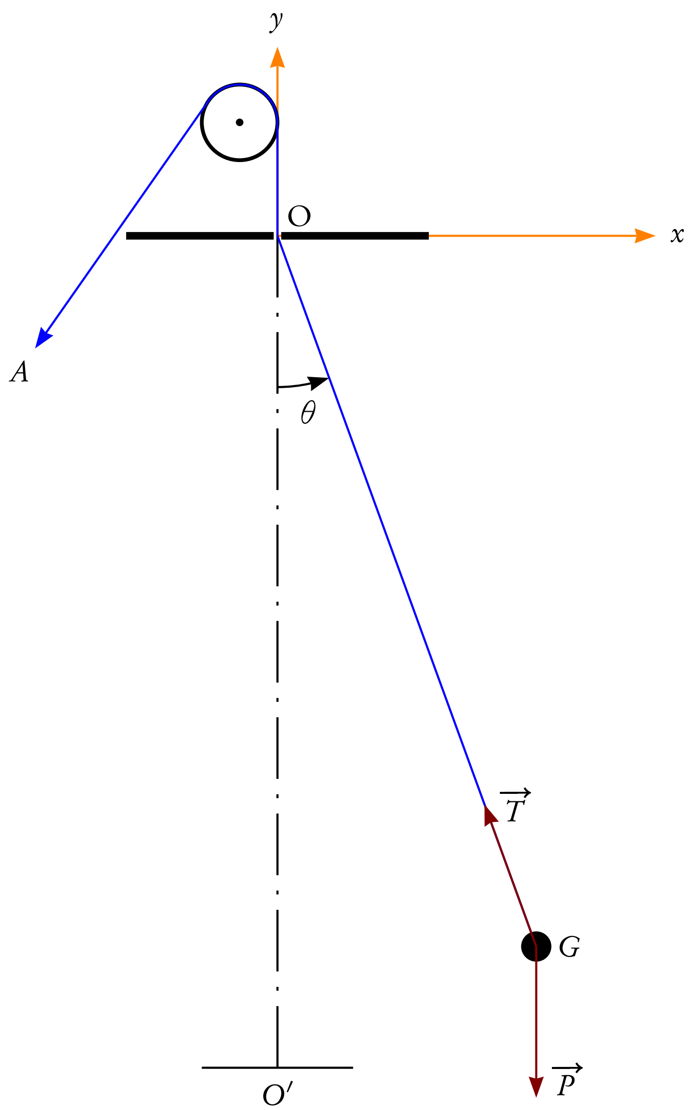
Pendule de longueur variable

1er mai 2012

Henri Bouasse introduit ce problème de la manière suivante :

« Voici d'abord la question usuelle qui lui a donné naissance : une benne est remontée dans un puits de mine ; elle oscille ; on demande quelle est l'influence sur les oscillations de l'enroulement de la code sur le treuil. »

De nos jours ce problème est typiquement celui d'une charge soulevée par l'intermédiaire d'une grue. Voici le schéma d'Henri Bouasse [1], page 436.



O' est le point le plus bas, $OO' = l_0$ est la longueur initiale de la corde. La longueur de la corde, inextensible et de masse négligeable, à un instant t est notée l et la charge est supposée ponctuelle.

Énergie cinétique :

$$\mathscr{E}_C = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$$

1. Cours de mécanique rationnelle et expérimentale. Paris. Librairie Ch. Delagrave

Énergie potentielle de pesanteur :

$$\mathcal{E}_p = -mgl\cos\theta$$

Utilisons le formalisme Lagrangien :

$$L = \mathcal{E}_C - \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \theta} &= -mgl\sin\theta \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= ml^2\dot{\theta} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= 2ml\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\dot{\theta} + ml^2\ddot{\theta}
\end{aligned}$$

Équation de Lagrange :

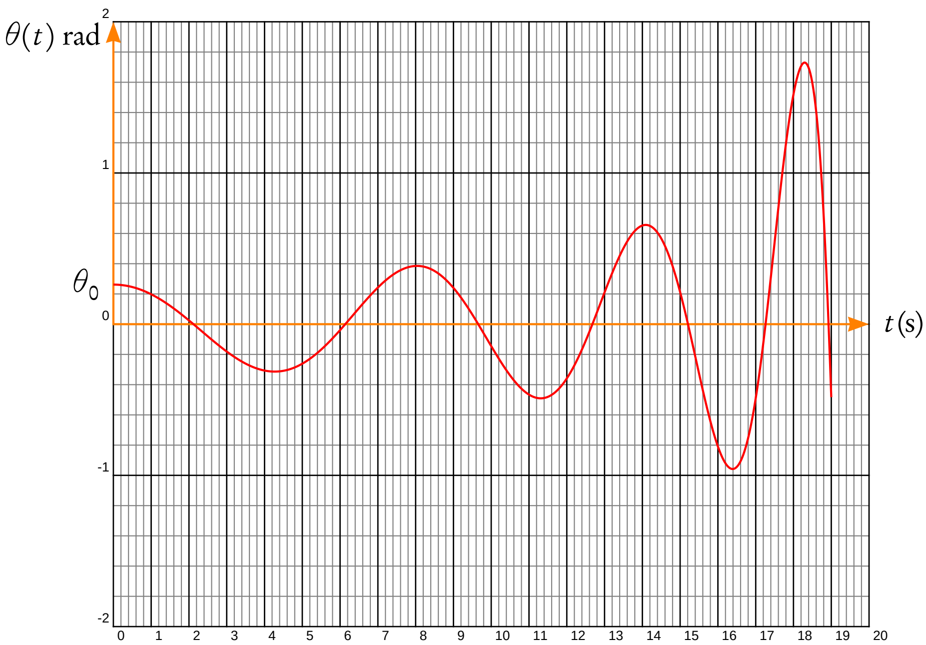
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{2}{l}\dot{l}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0} \qquad (1)$$

Supposons que la corde soit enroulée sur le treuil à une vitesse constante : $l = l_0 + at$. Avec $a < 0$, le charge remonte et $a > 0$ elle descend. Dans ce cas, l'équation (1) peut s'écrire :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}l^2} + \frac{2}{l}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}l} + \frac{g}{a^2 l}\sin\theta = 0} \qquad (2)$$

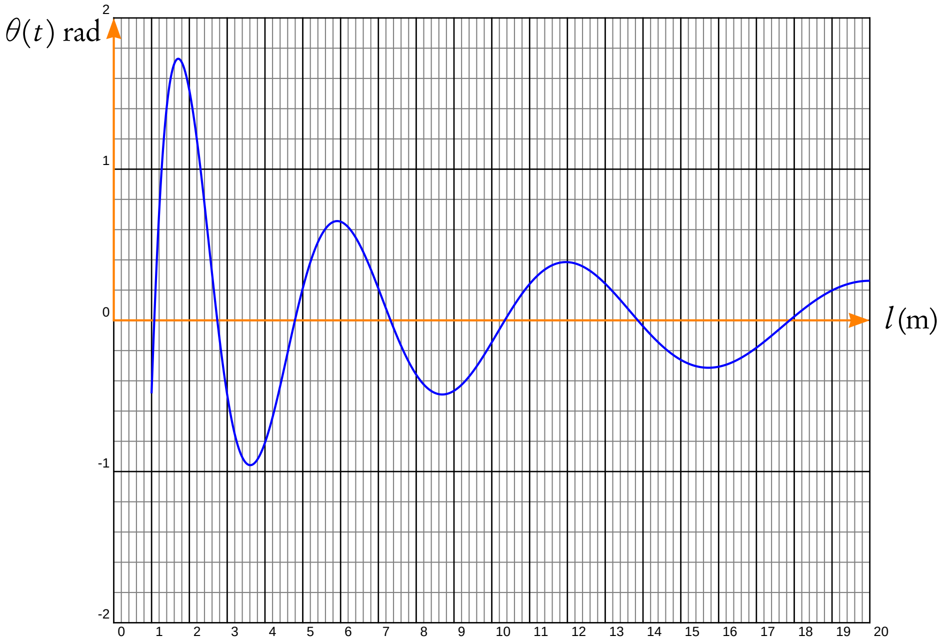
À l'instant initial $t = 0$, la corde fait un angle θ_0, petit, avec la verticale et la longueur vaut l_0. On abandonne la charge et la corde commence à s'enrouler sur le treuil à vitesse constante. Sur le graphique ci-dessous, on constate que les oscillations de la charge augmentent en amplitude au cours de la montée. Dans cet exemple, l'angle initial vaut $\theta_0 = 15°$, la longueur initiale $l_0 = 20\,\mathrm{m}$ et la corde s'enroule autour du treuil à la vitesse de 1 m/s. La charge est remontée sur une hauteur de 19 m.

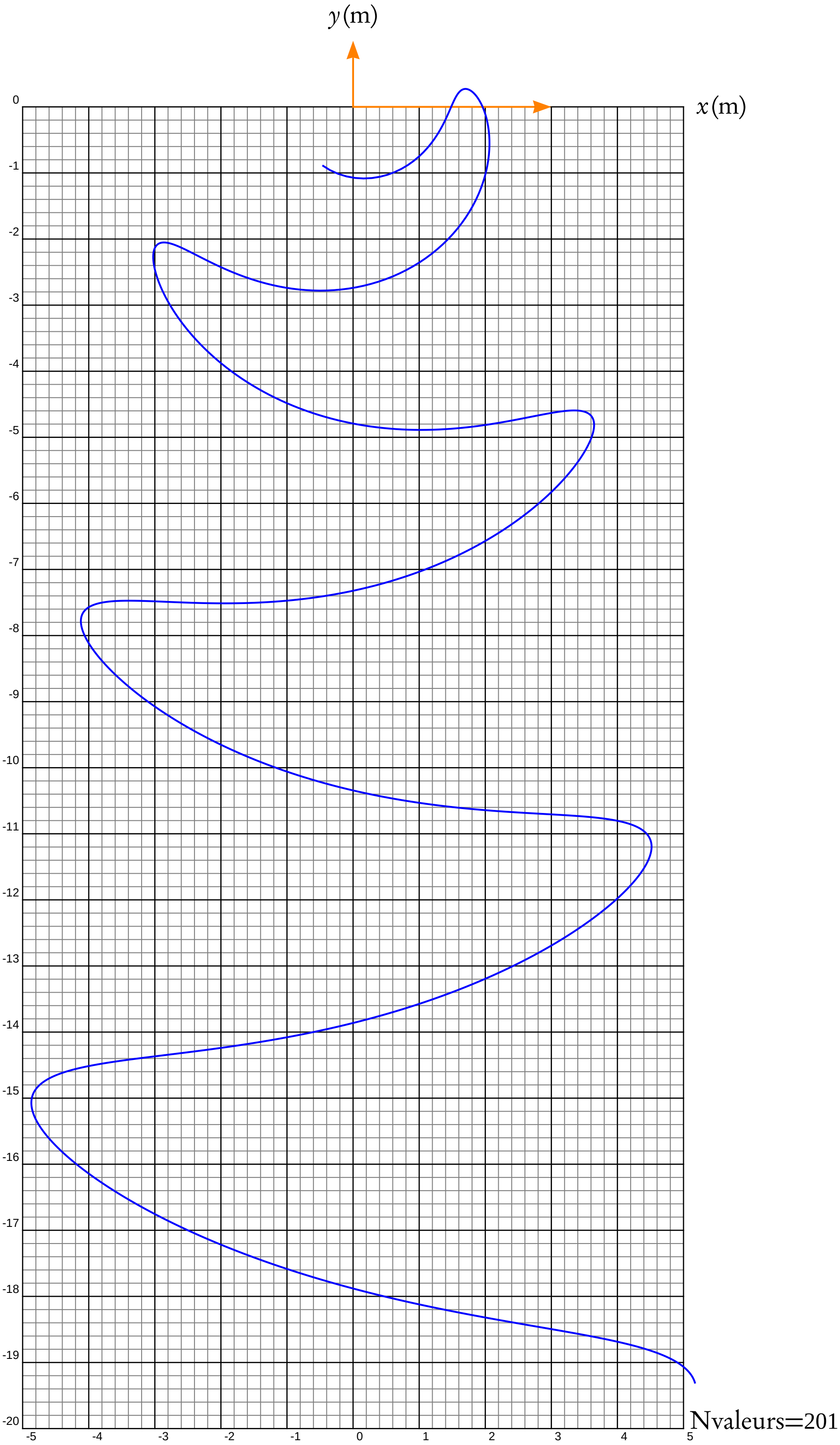


Nvaleurs=1000

La position du pendule à un instant (t) est donnée par les équations :

$$\begin{cases} x = (l_0 + at)\sin\theta(t) \\ y = -(l_0 + at)\cos\theta(t) \end{cases}$$




y(m)
x(m)
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10
-11
-12
-13
-14
-15
-16
-17
-18
-19
-20
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
Nvaleurs=201