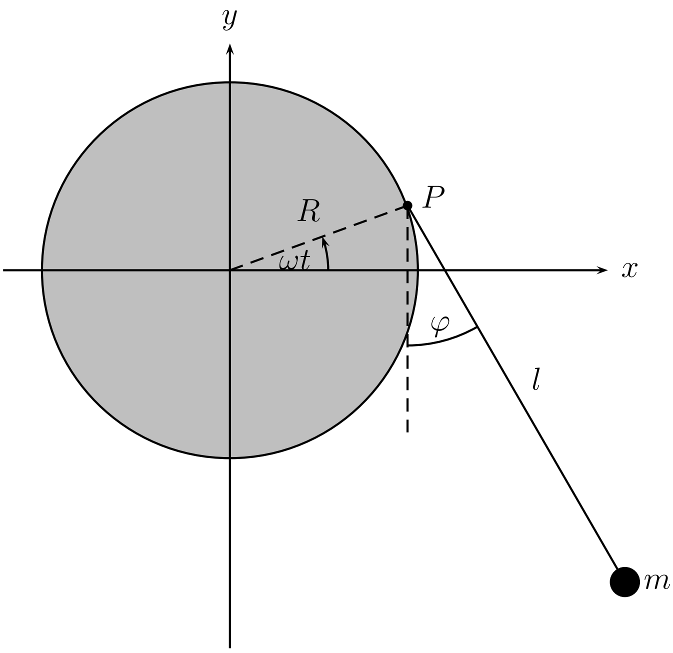
Pendule dont le point de suspension est entraîné dans une rotation uniforme

27 mai 2012



Le point de suspension du pendule est entraîné dans un mouvement de rotation uniforme. L'articulation au niveau du point de suspension est parfaite, la tige rigide qui relie celui-ci à la lentille du pendule a une masse négligeable et la lentille de masse m est supposée ponctuelle. Tous les frottements sont négligés. Gilbert Gastebois en donne une étude théorique sur son site[1].

Ci-après, Jürgen Gilg vous en propose une autre :

$$\begin{aligned} x_P &= R\cos\omega t \\ y_P &= R\sin\omega t \\ x &= R\cos\omega t + l\sin\varphi \\ y &= R\sin\omega t - l\cos\varphi \end{aligned}$$

The derivatives

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -R\omega\sin\omega t + l\dot{\varphi}\cos\varphi \\ \dot{y} &= R\omega\cos\omega t + l\dot{\varphi}\sin\varphi \end{aligned}$$

[1]Dans la dernière partie de cette page :
`http://gilbert.gastebois.pagesperso-orange.fr/java/double/theorie_pendule_double.htm`

The squares of the derivatives

$$\begin{aligned}\dot{x}+\dot{y} &= (-R\omega\sin\omega t + l\dot{\varphi}\cos\varphi)^2 + (R\omega\cos\omega t + l\dot{\varphi}\sin\varphi)^2 \\ &= R^2\omega^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2Rl\omega\dot{\varphi}\sin(\varphi+\omega t)\end{aligned}$$

The kinetic energy

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) \\ &= \frac{1}{2}mR^2\omega^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mRl\omega\dot{\varphi}\sin(\varphi+\omega t)\end{aligned}$$

Potential energy

$$\begin{aligned}U &= mgy \\ &= mg(R\sin\omega t - l\cos\varphi)\end{aligned}$$

The Lagrange function

$$\begin{aligned}L &= T-U \\ &= \frac{1}{2}mR^2\omega^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mRl\omega\dot{\varphi}\sin(\varphi+\omega t) - mg(R\sin\omega t - l\cos\varphi)\end{aligned}$$

For φ, $\dot{\varphi}$, we get

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \varphi} &= mRl\omega\dot{\varphi}\cos(\varphi+\omega t) - mgl\sin\varphi \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= ml^2\dot{\varphi} + mRl\omega\sin(\varphi+\omega t) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= ml^2\ddot{\varphi} + mRl\omega(\dot{\varphi}+\omega)\sin(\varphi+\omega t)\end{aligned}$$

Thus

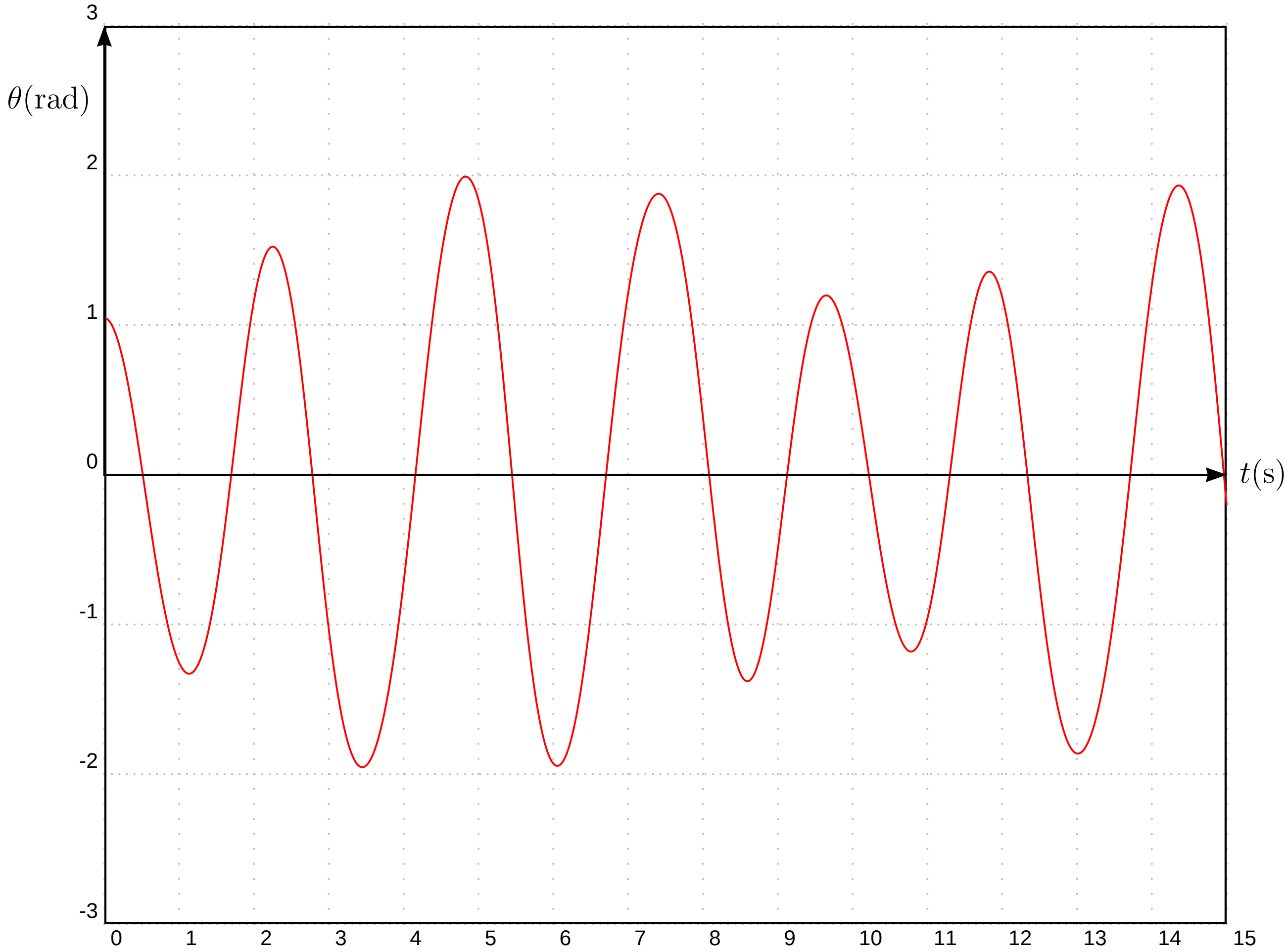
$$\boxed{\ddot{\varphi} + \frac{R}{l}\omega^2\cos(\varphi+\omega t) + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0}$$

Dans l'animation suivante créée avec le package `animate`, vous pourrez faire varier les différentes paramètres du système : rayon, longueur du pendule, angle fixant la position initiale du pendule θ_0.

```
\pstVerb{/L0 1 def  % longueur en m
         /W 2 def   % vitesse de rotation en rad/s
         /R 0.5 def % rayon en m
         /theta0 60 deg2rad def % angle initial en degrés
         /thetapoint0 0 def     % vitesse angulaire initiale
         }%
```

Pour des valeurs de ω voisines de la pulsation propre du pendule, on peut constater que, même pour un angle initial petit, l'amplitude des oscillations devient rapidement très grande et le pendule peut effectuer un tour complet. Cependant, il est difficile de parler de résonance car la pulsation propre du pendule dépend de l'amplitude et la vitesse de rotation du cylindre entraînant le point de suspension est constante. Il faudrait asservir celle-ci à l'amplitude du pendule.

Un tel dispositif trouverait certainement sa place dans un parc d'attractions foraines, où la lentille du pendule serait remplacée par une nacelle dans laquelle prendraient place les amateurs de sensations fortes.



θ(rad)
t(s)
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15