PARAMÉTRISATION D'UNE ELLIPSE AVEC VECTEUR VITESSE TOURNANT À VITESSE CONSTANTE

JEAN-FRANÇOIS BURNOL

1. Le raisonnement

Considérons une ellipse avec sa paramétrisation la plus simple $x(t) = a\cos(t)$, $y(t) = b\sin(t)$. Notons $\mathrm{P}(t) = (x(t), y(t))$. Le vecteur vitesse est $(-a\sin(t), b\cos(t))$ et on a la relation amusante $\vec{v}(t) = \mathrm{P}(t + \pi/2)$. En tout cas elle montre que le vecteur vitesse ramené à l'origine parcourt la même ellipse...

Introduisons la transformation affine τ (laissant invariante l'origine des coordonnées et) donnée par la matrice

$$\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 0 & -a/b \\ b/a & 0 \end{pmatrix}$$

La relation $\vec{v}(t) = \mathrm{T}(\mathrm{P}(t))$ va être importante pour nous. En effet supposons que nous fassions une reparamétrisation (positive) en $\mathrm{P}(\phi(u))$, $t = \phi(u)$.[1] Alors le nouveau vecteur vitesse $\vec{\mathrm{V}}(u) = \vec{v}(\phi(u))\phi'(u)$ est un multiple scalaire positif de l'ancien, et par conséquent $\mathrm{T}^{-1}(\vec{\mathrm{V}})$ est un multiple scalaire positif de $\mathrm{P}(\phi(u))$.

Si l'on connaît le vecteur tangent unitaire $\vec{\mathrm{V}}/\|\vec{\mathrm{V}}\|$ (notons le $\vec{\imath}$) en fonction de u on obtient la direction de la demi-droite dirigée par $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ simplement en appliquant la transformation T^{-1} à $\vec{\imath}(u)$; et il n'y a plus qu'à intersecter cette direction avec l'ellipse pour entièrement connaître le point P en fonction de u.[2]

On fait les calculs suivants :

$$\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b/a & 0 \\ 0 & a/b \end{pmatrix} \implies \mathrm{T}^{-1} = \begin{pmatrix} a/b & 0 \\ 0 & b/a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

où la dernière matrice est celle de la rotation d'angle $-\pi/2$ et on obtient

$$\mathrm{P}(u) = \lambda(u)\mathrm{T}^{-1}\vec{\imath} = \lambda(u)\begin{pmatrix} a/b & 0 \\ 0 & b/a \end{pmatrix}\mathcal{R}(-\frac{\pi}{2})\vec{\imath}(u)$$

avec un scalaire $\lambda(u) > 0$ inconnu.

Nous voulons simplement que $\vec{\imath}(u)$ tourne à 1rad/s, et on veut que $\mathrm{P}(0)$ soit $(a, 0)$, avec vitesse verticale pointant vers les $y > 0$, donc il y a une unique façon et c'est de poser $\mathcal{R}(-\frac{\pi}{2})\vec{\imath}(u) = (\cos u, \sin u)$.

Ainsi, notre reparamétrisation sera de la forme

$$x(u) = \lambda(u)\frac{a}{b}\cos u$$
$$y(u) = \lambda(u)\frac{b}{a}\sin u$$

Date: Vendredi 1 mars 2019.

1. Suivant l'habitude des physiciens j'écrirai alors souvent $\mathrm{P}(u)$, et non pas $\mathrm{P}(\phi(u))$, car c'est commode.

2. Il y donc là une propriété fondamentale de ces courbes paramétrées (avec l'origine à l'intérieur et intersectant une seule fois chaque demi-droite) qui sont telles que le vecteur vitesse est lié au vecteur point par une transformation vectorielle fixe : je laisse au lecteur la classification de telles courbes paramétrées...

et $x(u)^2/a^2 + y(u)^2/b^2 = 1 = \lambda(u)^2\left(\frac{\cos^2 u}{b^2} + \frac{\sin^2 u}{a^2}\right)$, donc :

$$\lambda(u) = \frac{1}{\left(\frac{\cos^2 u}{b^2} + \frac{\sin^2 u}{a^2}\right)^{1/2}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2\cos^2 u + b^2\sin^2 u}}$$

Finalement

$$x(u) = \frac{a^2\cos u}{\sqrt{a^2\cos^2 u + b^2\sin^2 u}} \tag{1}$$

$$y(u) = \frac{b^2\sin u}{\sqrt{a^2\cos^2 u + b^2\sin^2 u}} \tag{2}$$

est la paramétrisation recherchée.

2. Petite interprétation géométrique

Le vecteur $\mathcal{R}(-\frac{\pi}{2})\vec{\imath}(u)$ est dans la direction de $\mathcal{R}(-\frac{\pi}{2})\vec{v}(t)$, $t = \phi(u)$. Or $\mathcal{R}(-\frac{\pi}{2})\vec{v}(t)$ parcourt l'ellipse $\mathcal{E}'$ d'équation $x^2/b^2 + y^2/a^2 = 1$, qui a les paramètres (b, a) là où l'originale $\mathcal{E}$ avait les paramètres (a, b). L'ellipse dilatée $\mathrm{E}_1 = \frac{a}{b}\mathcal{E}'$ partage les sommets sur l'axe des x avec $\mathcal{E}$ et l'ellipse dilatée $\mathrm{E}_2 = \frac{b}{a}\mathcal{E}'$ partage avec $\mathcal{E}$ les sommets de l'axe des y.

La transformation d'échelle $\left(\begin{smallmatrix} a/b & 0 \\ 0 & b/a \end{smallmatrix}\right)$ a la propriété de transformer $\mathcal{E}'$ en $\mathcal{E}$ et son inverse transforme $\mathcal{E}$ en $\mathcal{E}'$; nous avons ainsi nécessairement la relation

$$\mathrm{P}(u) = \begin{pmatrix} a/b & 0 \\ 0 & b/a \end{pmatrix}\mathcal{R}(-\frac{\pi}{2})\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b^2/a^2 \end{pmatrix}\frac{a}{b}\mathcal{R}(-\frac{\pi}{2})\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} a^2/b^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{b}{a}\mathcal{R}(-\frac{\pi}{2})\vec{v}(t)$$

À l'instant u, $\frac{a}{b}\mathcal{R}(-\frac{\pi}{2})\vec{v}(t(u))$ est entièrement caractérisé comme le point de E_1 suivant la demi-droite dirigée par $(\cos u, \sin u)$ et le point $\mathrm{P}(u)$ aura la même coordonnée horizontale. De même $\frac{b}{a}\mathcal{R}(-\frac{\pi}{2})\vec{v}(t(u))$ est entièrement caractérisé comme le point de E_2 tel que la demi-droite passant par lui depuis l'origine a $(\cos u, \sin u)$ comme vecteur directeur, et le point $\mathrm{P}(u)$ aura la même coordonnée verticale.

On a donc déterminé les coordonnées horizontale et verticale de $\mathrm{P}(u)$ par une construction géométrique (on peut aussi faire une construction avec des hyperboles reliant un point de $\mathcal{E}'$ à un autre point de $\mathcal{E}$).

Voir la figure en page suivante.

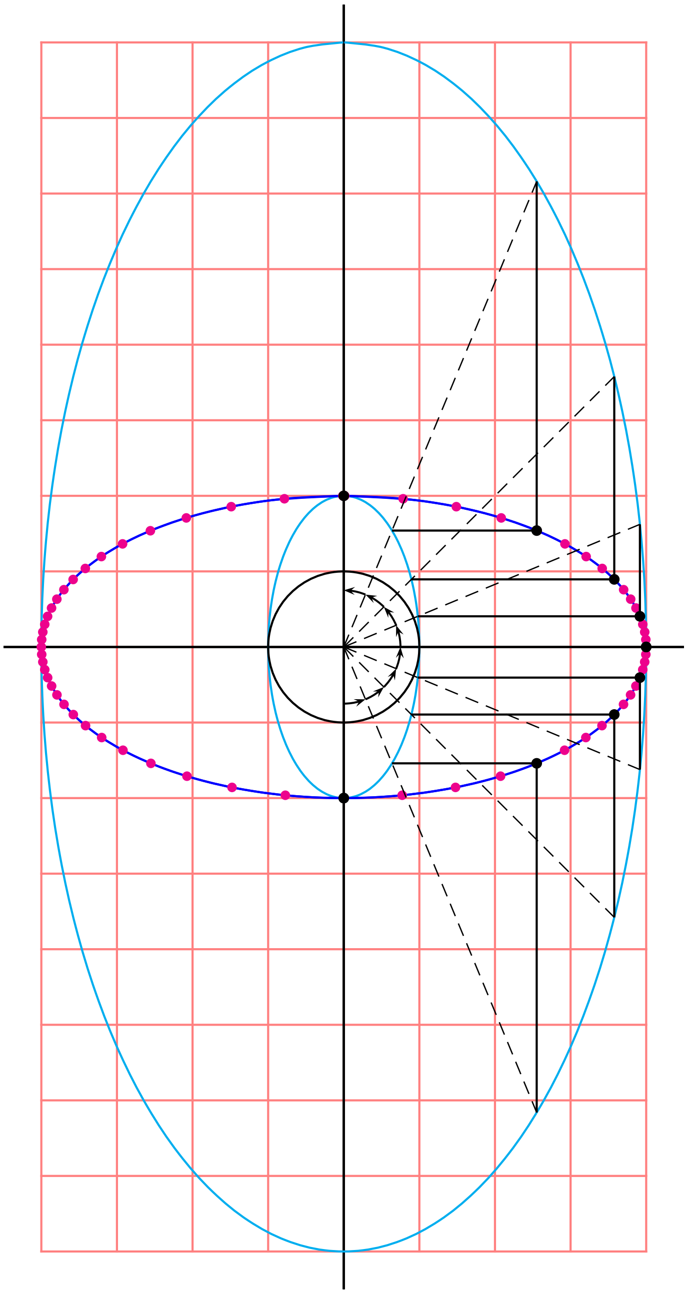

FIGURE 1. Comment l'on paramétrise une ellipse afin d'avoir une tangente tournant à vitesse angulaire constante. La tangente en un point P est perpendiculaire à la droite pointillée intersectant les deux ellipses homothétiques en deux points P_1 et P_2 et P a la coordonnée horizontale de P_1 (grande ellipse, ici) et la coordonnée verticale de P_2 (petite ellipse).