pmaxima

```
Maxima 5.30.0 http://maxima.sourceforge.net
using Lisp GNU Common Lisp (GCL) GCL 2.6.7 (a.k.a. GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
```

Exercice

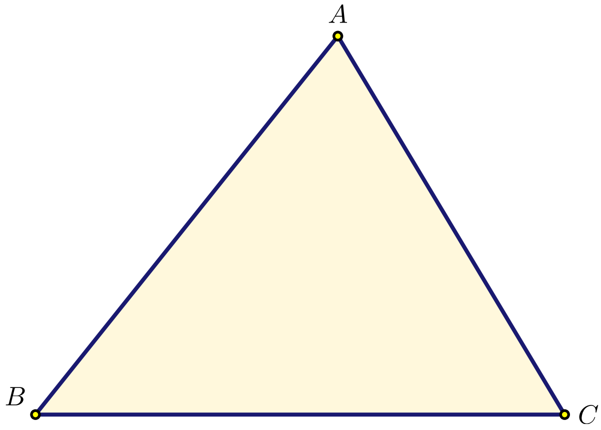
L'énoncé suivant correspond au 2ème problème des

17th Junior Balkan Mathematical Olympiad — 21-26 juin 2013

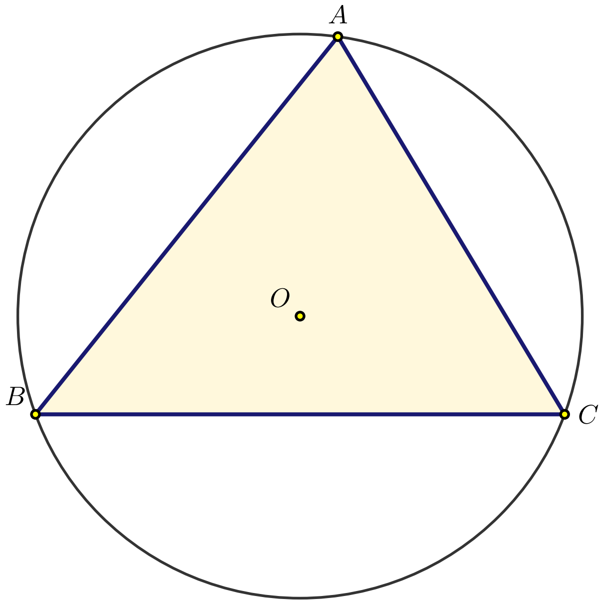
> Soit ABC un triangle acutangle tel que $AB < Ac$. Soient O le centre de son cercle circonscrit ω et D un point du segment $[BC]$ tel que $\angle BAD = \angle CAO$. Soit E le second point d'intersection de ω avec la droite (AD). Soient finalement M, N et P les milieux respectifs des segments $BE]$, $[OD]$ et $[AC]$. Prouver que les points M, N et P sont alignés.

Construction de la figure en plusieurs étapes.

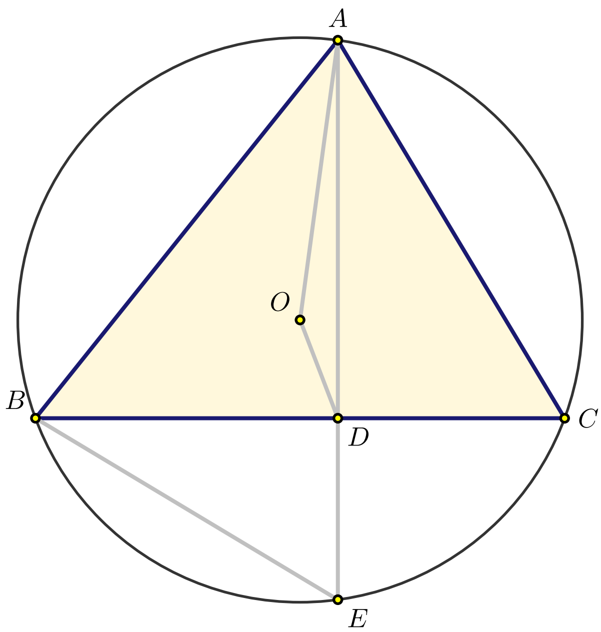
```
▷ load(gdd)$
▷ (B:Origine, A:Point(2,2.5), C: Point(3.5,0), T:Triangle(A,B,C))$
▷ Figure('A,'B,'C,'T);
```




```
▷ (O:PointTriangle(T,"O"),C1:CercleCirconscrit(T))$
▷ Figure('O,'C1);
```

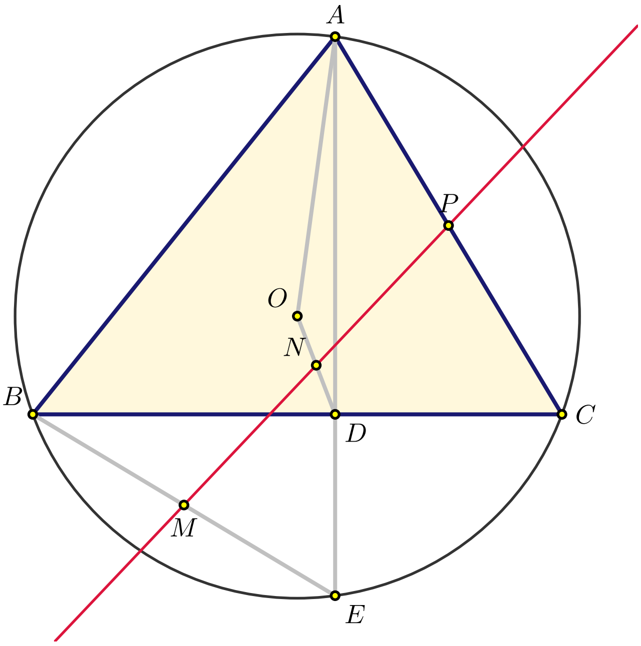



```
▷ (S1:Segment(A,O),d:Rotation(Droite(A,B),A,Angle(C,A,O)))$
▷ D:Intersection(d,Droite(B,C))$
▷ E:Intersection(d,C1)[2]$
▷ S:[Segment(A,O),Segment(A,E),Segment(B,E),Segment(O,D)]$
▷ Figure('D,'E,'S);
```



Comme on peut le constater la droite (DE) est, en fait, la hauteur de ABC issue de A. On le démontre en traçant les rayons $[OA]$, $[OB]$ et $[OC]$. Il apparaît alors des triangles isocèles dont les égalités angulaires permettent d'établir $\angle DAB+\angle ABD=\pi/2$, ce qui est suffisant pour affirmer que le triangle ABD est rectangle en D.

```
▷ (M:Milieu(B,E), N:Milieu(O,D), P:Milieu(A,C), d2:Droite(M,P))$
▷ Figure('M,'N,'P,'d2);
```

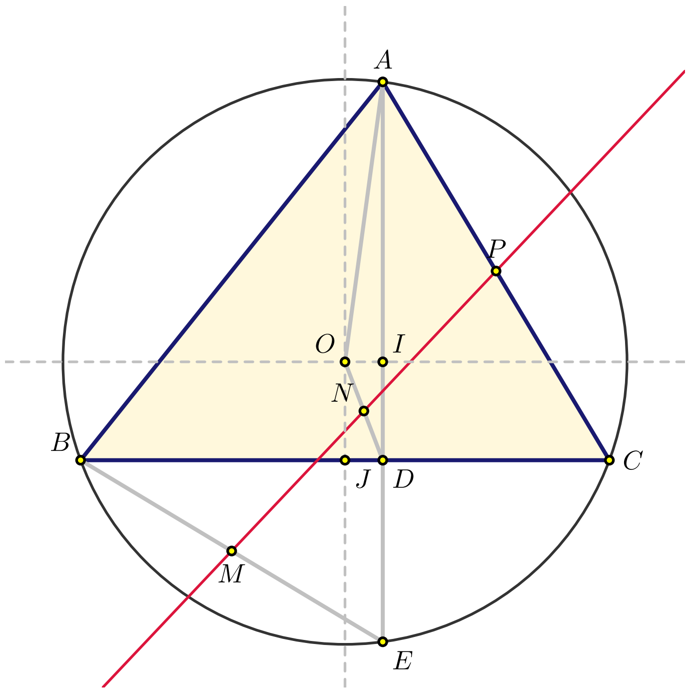


Il semblerait bien qu'en plus d'être alignés les points M, N et P aient la propriété suivante : N est le milieu de $[MP]$.

```
▷ (I:Projection(O,Droite(A,E)),J:Projection(O,Droite(B,C)))$
```

```
▷ a1:[Droite(O,I),Droite(O,J)]$
```

```
▷ Figure('a1,'I,'J);
```



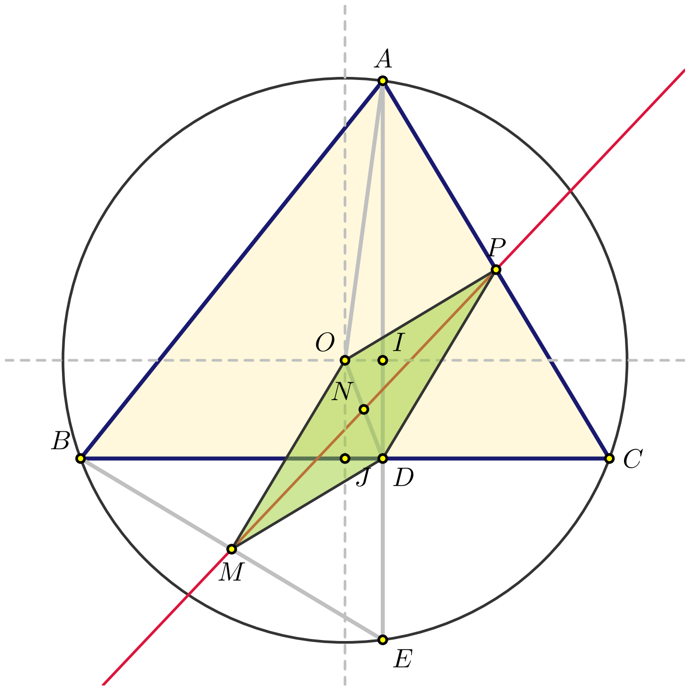
On a alors :

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} = \cdots = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OM}.$$

Le quadrilatère $OPDM$ est un parallèlogramme ! Ce qui établit la propriété demandée.

```
▷ p:Polygone([O,P,D,M])$
```

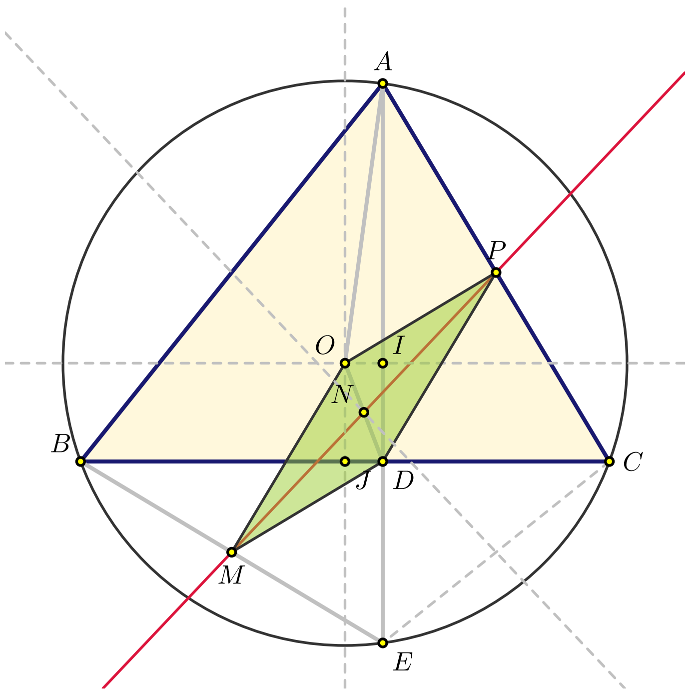
```
▷ Figure('p);
```



Ajoutons deux éléments à la figure : le segment $[CE]$ et la droite joignant les milieux de $[AB]$ et de $[CE]$.

```
▷ a2:[Droite(Milieu(A,B),Milieu(C,E)),Segment(C,E)]$
```

```
▷ Figure('a2);
```



Bien sûr, cela confirme !

Le style attaché aux figures est à la fin du fichier source du document.
pmaxima et `gdd.mac` : `http://melusine.eu.org/syracuse/P/pmaxima`
JMS — La Rochelle — 27 juin 2013