Construction de l'orbite de **Hill** avec **xint**

George William Hill (1838-1914) est un astronome et mathématicien américain qui a beaucoup étudié le problème des trois ou quatre corps, en particulier le *problème des trois corps restreint* (corps de masse nulle dans le champ de gravitation de deux corps massifs).

Une illustration de ce dernier problème peut-être vue dans la trajectoire d'un satellite artificiel dans le champ de gravitation du couple *Terre-Lune*. Il y a une grande variété d'orbites possibles sous le seul effet de l'attraction universelle, l'une d'entre elles est fascinante, c'est justement celle qui a été mise à jour par **G.W. Hill**.

Nous allons envisager le satellite dans le plan du mouvement de la Terre et de la Lune autour de leur centre de gravité[1]. La masse de la Lune sera notée μ et celle de la Terre $1-\mu$, de sorte que la masse totale soit 1. Dans le repère tournant autour du centre de gravité *Terre-Lune*, les coordonnées de la Terre seront $(-\mu, 0)$ et celle de la Lune $(1-\mu, 0)$; ainsi l'unité de distance sera fixée.

Pour faire court, après changement de référentiel (passage dans le repère tournant - vitesse de rotation : 1) et transformation canonique (pour disposer de variables conjuguées), nous avons les équations du mouvement :

$$\begin{aligned}
\dot{Q}_x &= P_x + Q_y \\
\dot{Q}_y &= P_y - Q_x \\
\dot{P}_x &= P_y + (1-\mu)\frac{\partial}{\partial Q_x}\left(\frac{1}{R_T}\right) + \mu\frac{\partial}{\partial Q_y}\left(\frac{1}{R_L}\right) \\
\dot{P}_y &= -P_x + (1-\mu)\frac{\partial}{\partial Q_x}\left(\frac{1}{R_T}\right) + \mu\frac{\partial}{\partial Q_y}\left(\frac{1}{R_L}\right)
\end{aligned}$$

où (Q_x, Q_y) est la position du satellite, (P_x, P_y) les moments conjugués, $R_T = \sqrt{(Qx+\mu)^2 + Q_y^2}$, $R_L = \sqrt{(Q_x - 1 + \mu)^2 + Q_y^2}$.

Mise en place du second membre

La transcription du système ci-dessus est un peu lourde mais il ne faut reculer devant rien avec **xint**.

```
\xintdeffloatvar m := 1/82.45;% <-- mu
\xintdeffloatvar M := 1-m;%
%
\xintdeffloatfunc r32(x,y,c) := ((x+c)^2+y^2)^(1.5);%
\xintdeffloatfunc sm(t,qx,qy,px,py) := px+qy,py-qx,%
                     py-M(qx+m)/r32(qx,qy,m)-m(qx-M)/r32(qx,qy,-M),%
                     -px-qy*(M/r32(qx,qy,m)+m/r32(qx,qy,-M));%
```

Conditions initiales

Pour obtenir l'orbite périodique, les conditions initiales sont :

```
\xintdeffloatvar t0  := 0;%
\xintdeffloatvar tf  := 6.1927;%    Période de l'orbite de Hill
\xintdeffloatvar hi  := 0.01;%      Pas de temps initial;
\xintdeffloatvar qx0 := 1.2;%
\xintdeffloatvar qy0 := 0;%
\xintdeffloatvar px0 := 0;%
% La vitesse initiale est -1.04935750483 selon l'axe des y
\xintdeffloatvar py0 := 1.2-1.04935750483;%
```

1. Le mouvement de la Lune et de la Terre est considéré comme circulaire, c'est déjà assez compliqué comme ça !

Go !

```
\rkSeuils{}
\rkSolIV(t0,tf,hi,qx0,qy0,px0,py0,hill01) % <- Les données seront sauvegardées dans
                                          % les fichiers hill01_*.xint
\xinteval{N}, \ftf4{hmin}, \ftf4{hmax}
```

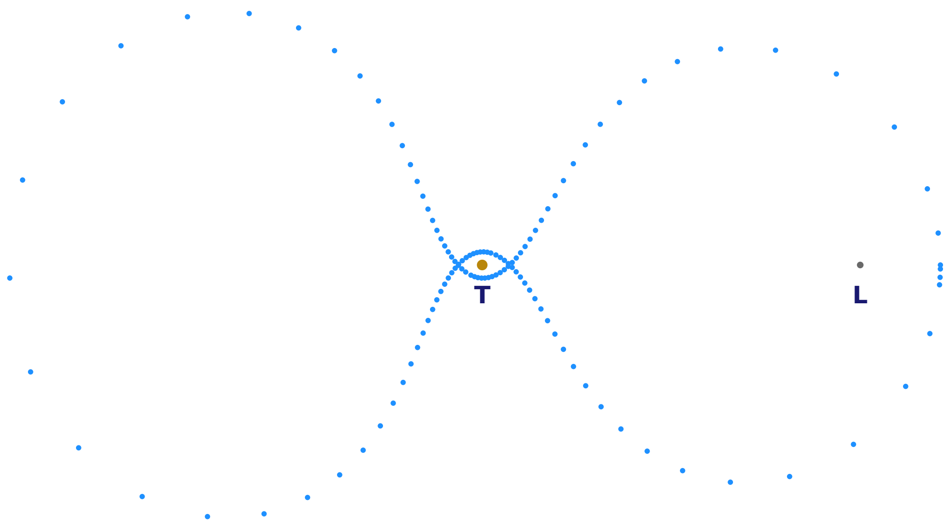
120, 0.0012, 0.2508

Vu les pas minimal et maximal, l'attraction a dû être forte à certains moments alors qu'à d'autres le mouvement était tranquille…

À ce niveau là de notre scénario, les points calculés de la trajectoire ont été sauvegardés ; lors de toute recompilation, ce sont ces données sauvegardées qui seront utilisées, on gagne du temps et on peut se livrer à toutes les analyses souhaitées ainsi que multiplier les représentations. Pour recalculer une trajectoire, avec des paramètres différents par exemple, il suffit de supprimer le fichier `hill01_par.xint` ou de faire de nouveau appel à `\rkSolIV` avec un *préfixe* de fichier différent (le huitième argument).

Enfin, la trajectoire de Hill !

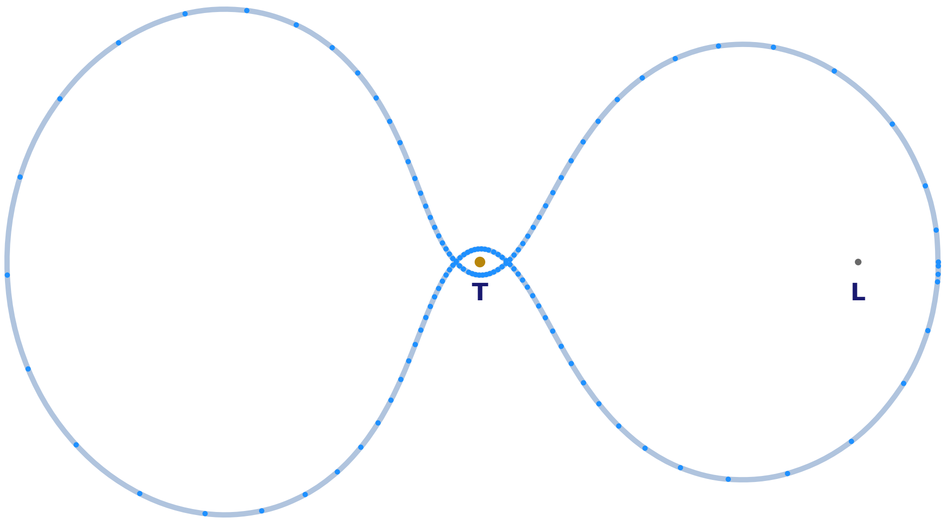
```
\begin{center}
 \psset{xunit=5cm,yunit=5cm}
 \begin{pspicture}(-1.3,-0.7)(1.3,0.7)%
  \psdot[linecolor=DarkGoldenrod,dotsize=4pt](\ftf4{-m},0)
  \psdot[linecolor=DimGray,dotsize=2.5pt](\ftf4{M},0)
  \multido{\i=1+1}{\ftf0{N}}{%
   \psdot[linecolor=DodgerBlue,dotsize=2pt](\ftf4{QX\i},\ftf4{QY\i})
  }%
  \uput{8pt}[-90](\ftf4{-m},0){\sffamily\textbf{T}}
  \uput{8pt}[-90](\ftf4{M},0){\sffamily\textbf{L}}
 \end{pspicture}
\end{center}
```



Nous allons interpoler la courbe avec `\listplot`.

```
\xintNewFunction{point}[1]{%
  \ftf4{QX\xinteval{#1}},\ftf4{QY\xinteval{#1}}}%
\edef\Points{%
  \xintthespaceseparated \xintfloatexpr seq(point(i),i=1..N)\relax
}%
```

```
\begin{center}
  \psset{xunit=5cm,yunit=5cm}
  \begin{pspicture}(-1.3,-0.7)(1.3,0.7)%
    \psdot[linecolor=DarkGoldenrod,dotsize=4pt](\ftf4{-m},0)
    \psdot[linecolor=DimGray,dotsize=2.5pt](\ftf4{M},0)
    \listplot[plotstyle=curve,linecolor=LightSteelBlue,linewidth=2pt]{\Points}%
    \multido{\i=1+1}{\ftf0{N}}{%
      \psdot[linecolor=DodgerBlue,dotsize=2pt](\ftf4{QX\i},\ftf4{QY\i})
    }%
    \uput{8pt}[-90](\ftf4{-m},0){\sffamily\textbf{T}}
    \uput{8pt}[-90](\ftf4{M},0){\sffamily\textbf{L}}
  \end{pspicture}
\end{center}
```



Et dans le repère fixe ?

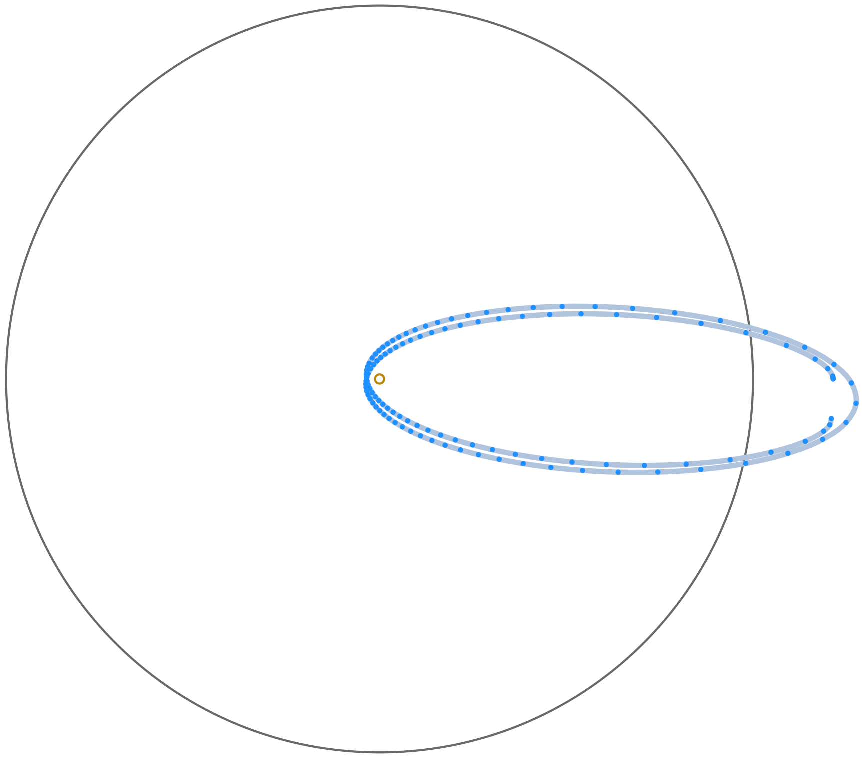
Dans la normalisation du mouvement, les choix ont conduit à ce que la vitesse de rotation (ω) du repère tournant soit égale à 1.

Préparons la mise en scène de la rotation.

```
\xintdeffloatfunc rotation(x,y,t) := cos(t)*x-sin(t)*y,sin(t)*x+cos(t)*y;%
\xintNewFunction{pointt}[1]{%
  \ftf4{QX\xinteval{#1}},\ftf4{QY\xinteval{#1}},\ftf4{LT\xinteval{#1}}}%
\edef\PointsR{%
  \xintthespaceseparated \xintfloatexpr seq(rotation(pointt(i)),i=1..N)\relax
}%
```

Regardons ! Les trajectoires de la Terre et de la Lune sont représentées sur un cycle complet, ce qui correspond à peu près, à la période de l’orbite de **Hill**.

```
\begin{center}
  \psset{xunit=5cm,yunit=5cm}
  \begin{pspicture}(-1.6,-1)(1.6,1)%
    \pscircle[linecolor=DarkGoldenrod](0,0){\ftf4{5m}}
    \pscircle[linecolor=DimGray](0,0){\ftf4{5M}}
    \listplot[plotstyle=curve,linecolor=LightSteelBlue,linewidth=2pt]{\PointsR}%
    \multido{\i=1+1}{\ftf0{N}}{%
      \psdot[linecolor=DodgerBlue,dotsize=2pt](\ftf4{rotation(pointt(\i))})
    }%
    % \uput{8pt}[-90](\ftf4{-m},0){\sffamily\textbf{S}}
    % \uput{8pt}[-90](\ftf4{M},0){\sffamily\textbf{L}}
  \end{pspicture}
\end{center}
```



C’est moins spectaculaire, néanmoins amusant : nos amis sélènes peuvent envisager, en partant très tôt, de venir faire leurs courses chez nous et de retourner pour la collation de minuit lunaire ; à soumettre à *Elon Musk* !

Mais quelle précision ?

Ici, on ne dispose pas de la solution exacte du problème pour faire une comparaison effective avec la solution calculée.

Tout n’est pas perdu, il y une *intégrale première*, l’**hamiltonien** K, dont nous allons pouvoir vérifier la stabilité tout au long des calculs.

Voici l’expression de K :

$$K = \frac{1}{2}\left(P_x^2 + P_y^2\right) + P_x Q_y - P_y Q_x - \left(\frac{1-\mu}{R_T} + \frac{\mu}{R_L}\right)$$

Et sa transcription avec **xint** :

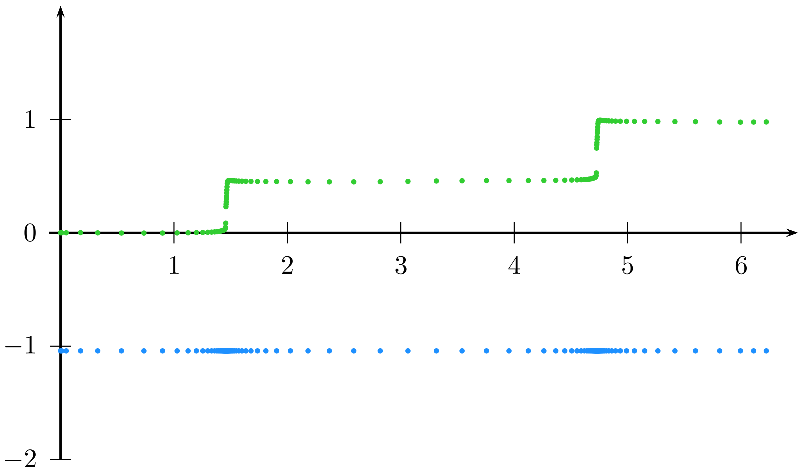
```
\xintdeffloatfunc R(x,y,c) := sqrt((x-c)^2+y^2);%
\xintdeffloatfunc K(qx,qy,px,py) := 0.5(px^2+py^2)+px*qy-py*qx-(M/R(qx,qy,-m)+m/R(qx,qy,M));%
\xintdeffloatvar K0 := K(qx0,qy0,px0,py0);%
\ftf9{K0}
```

```
-1.041588936
```

Nous aurons besoin des paires de variables conjuguées :

```
\xintNewFunction{pvc}[1]{%
 QX\xinteval{#1},QY\xinteval{#1},PX\xinteval{#1},PY\xinteval{#1}%
}%
\begin{center}
 \psset{xunit=1.5cm,yunit=1.5cm}
 \begin{pspicture}(-0.1,-2)(6.5,2)
   \psaxes{->}(0,0)(-0.1,-2)(6.5,2)
   \multido{\i=1+1}{\ftf0{N}}{%
```

```
      \xintdeffloatvar ti,Ki := LT\i,K(pvc(\i));
      \psdot[linecolor=Crimson,dotsize=2pt](\ftf4{LT\i},\ftf4{10000(Ki-K0)})
      \psdot[linecolor=DodgerBlue,dotsize=2pt](\ftf4{LT\i},\ftf4{Ki})
    }%
  \end{pspicture}
\end{center}
```

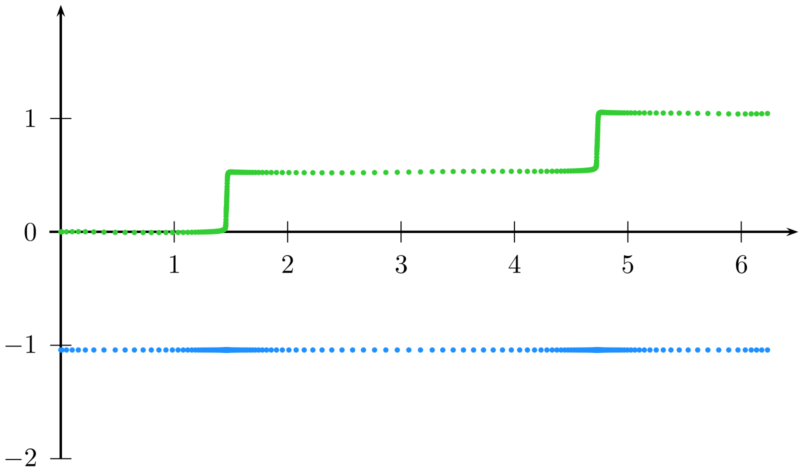


En bleu, l'hamiltonien, en vert, la différence entre l'hamiltonien de l'origine et celui de l'instant multipliée par 10000. On constate les dégâts (*relatifs*) à proximité de la Terre.

Essayons d'être plus contraignant sur la conservation du pas.

```
\xintdeffloatvar epsilon := 1e-6;
\rkSolIV(t0,tf,hi,qx0,qy0,px0,py0,hill02)
\xinteval{N}, \ftf6{hmin}, \ftf6{hmax}
```

```
272, 0.000486, 0.103472
```



Là, la différence entre l'hamiltonien de l'origine et celui de l'instant a été multipliée par 10^6. On peut estimer que l'on dispose, avec cette trajectoire, d'une précision de 10^{-6} ; ce dont je vais me satisfaire pour l'instant !

Idée pour la suite : Mettre en œuvre la méthode de Taylor pour intégrer ce système différentiel...