Continuité des fonctions numériques

Jean-Michel Sarlat

Sommaire : Exercices corrigés portant sur la continuité.

Entrées

– **Table des matières**
– **Début Document**

Mise à jour : 13 mars 2007 Version 1.2

Table des matières

1. Énoncés

EXERCICE 1. Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$. Montrer que f admet un point fixe.
i.e.

$$\exists x \in [0,1], f(x) = x$$

EXERCICE 2. Soit f une fonction continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ admettant des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que f est bornée.

EXERCICE 3. Soit f une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que :

$$\exists k > 0, \quad \forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$$

Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}$.

Solutions des Exercices

Exercice 1. Soit la fonction g définie par $g(x) = f(x) - x$. g est définie et continue sur $[0,1]$. On a :

$$g(0) = f(0) \geqslant 0 \text{ et } g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0 \text{ donc } g(0)g(1) \leqslant 0$$

En application du corollaire du théorème des valeurs intermédiares, la fonction g s'annule entre 0 et 1.
Or $g(x) = 0 \iff f(x) = x$, la fonction f admet donc un point fixe entre 0 et 1.

Exercice 1

Exercice 2. Deux méthodes :

1/ Soient l_1 et l_2 les limites respectives de f en $-\infty$ et $+\infty$. Il existe deux réels A_1 et A_2 tels que

$$x < A_1 \Rightarrow |f(x) - l_1| < 1 \text{ et } x > A_2 \Rightarrow |f(x) - l_2| < 1$$

Ceci prouve que f est bornée sur $]-\infty, A_1[$ et $]A_2, +\infty[$. Par ailleurs elle est bornée sur le segment dont les bornes sont A_1 et A_2 (f continue sur $\mathbf{R}$ donc sur ce segment), elle est donc bornée sur la réunion de ces trois intervalles qui est, dans tous les cas de figure, l'ensemble $\mathbf{R}$.

2/ On considère un homéomorphisme φ de $]0,1[$ sur $\mathbf{R}$, on peut choisir, par exemple, l'application réciproque de

$$x \longmapsto \frac{1}{2}\left(\frac{x}{|x|+1} + 1\right)$$

L'application $f \circ \varphi$ est définie et continue sur $]0,1[$, elle admet une limite finie en 0 et en 1, elle est donc prolongeable par continuité en 0 et en 1. L'application ainsi obtenue est bornée. Puisque

$$f(\mathbf{R}) = f \circ \varphi(]0,1[) \text{ et } f \circ \varphi(]0,1[) \text{ contenu dans un borné}$$

l'ensemble $f(\mathbf{R})$ est nécessairement borné.
Cette démonstration, retracée dans ces grandes lignes, est plus subtile que la précédente et montre l'usage que l'on peut faire des homéomorphismes. On y est confronté à une *réduction* de l'infini au fini intéressante.

Exercice 2

Exercice 3. Soit $a \in \mathbf{R}$, la fonction $x \mapsto f(x) - f(a)$ est dominée par $x \mapsto x - a$ au voisinage de a. Cette dernière à pour limite 0 en a, il en est donc de même de la première. Ceci se traduit par $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ ou encore : f est continue en a. Ceci s'applique à tout a de $\mathbf{R}$.

Exercice 3