Fonctions usuelles

Jean-Michel Sarlat

Sommaire : Fonctions circulaires réciproques et fonctions hyperboliques.

Entrées

Mise à jour : 13 mars 2007 Version 1.2

Table des matières

1. Rappels

Soit f une bijection d'un intervalle I de $\mathbf{R}$ sur un intervalle J de $\mathbf{R}$ et f^{-1} son application réciproque.

1/ $\forall x \in I,\ f^{-1}\left(f(x)\right) = x$ et $\forall y \in J,\ f\left(f^{-1}(y)\right) = y$
ie. $f^{-1} \circ f = id_I$ et $f \circ f^{-1} = id_J$

2/ Dans un repère orthonormé, C_f et $C_{f^{-1}}$ sont des courbes symétriques l'une de l'autre par rapport à la première bissectrice des axes.

3/ Si f est monotone sur I alors f est continue sur I, la réciproque est vraie. La fonction f^{-1} est alors monotone et continue sur J avec une monotonie identique à celle de f.

4/ Si f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable sur J et :

$$\forall x \in J,\ \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

ou encore :

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Définition 1 *f étant une bijection de I sur J, intervalles de* $\mathbf{R}$*, si f et f^{-1} sont continues on dit que f est un* ***homéomorphisme*** *de I sur J et que les intervalles I et J sont* ***homéomorphes****.*

Définition 2 *f étant une bijection de I sur J, intervalles de* $\mathbf{R}$*, si f et f^{-1} sont dérivables et si f' et ${f^{-1}}'$ sont des fonctions continues on dit que f est un* ***difféomorphisme*** *de I sur J.*

2. Fonctions circulaires réciproques

2.1. Arc Sinus

La fonction $x \mapsto \sin x$ est une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$, son application réciproque est la fonction **Arc sinus**, notée Arcsin, elle est définie sur $[-1, 1]$ et à valeurs dans $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$.

$$\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}], \operatorname{Arcsin}(\sin x) = x$$

$$\forall x \in [-1, 1], \sin(\operatorname{Arcsin} x) = x$$

La fonction Arcsin (voir Figure 1) est continue et croissante sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $]-1, 1[$.
On a :

$$\forall x \in]-1, 1[, \operatorname{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

puisque :

$$\forall x \in [-1, 1], \cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sqrt{1-x^2}$$

2.2. Arc Cosinus

La fonction $x \mapsto \cos x$ est une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$, son application réciproque est la fonction **Arc cosinus**, notée Arccos, elle est définie sur $[-1, 1]$ et à valeurs dans $[0, \pi]$.

$$\forall x \in [0, \pi], \text{Arccos}(\cos x) = x$$

$$\forall x \in [-1, 1], \cos(\text{Arccos}\, x) = x$$

La fonction Arccos (voir Figure 1) est continue et décroissante sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $]-1, 1[$.
On a :

$$\forall x \in]-1, 1[, \text{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

puisque :

$$\forall x \in [-1, 1], \sin(\text{Arccos}\, x) = \sqrt{1-x^2}$$

2.3. Arc Tangente

La fonction $x \mapsto \tan x$ est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbf{R}$, son application réciproque est la fonction **Arc tangente**, notée Arctan, elle est définie sur $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$.

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[, \operatorname{Arctan}(\tan x) = x$$

$$\forall x \in \mathbf{R}, \tan(\operatorname{Arctan} x) = x$$

La fonction Arctan (voir Figure 2)est continue, croissante et dérivable sur $\mathbf{R}$.
On a :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \operatorname{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

2.4. Formulaire

- **Parité**

  1/ Arcsin est impaire : $\forall x \in [-1,1]$, $\text{Arcsin}(-x) = -\text{Arcsin}(x)$

  2/ Arctan est impaire : $\forall x \in \mathbf{R}$, $\text{Arctan}(-x) = -\text{Arctan}(x)$

- **Arcs complémentaires**

  1/ $\forall x \in [-1,1],\ \text{Arcsin}\, x + \text{Arccos}\, x = \dfrac{\pi}{2}$

  2/ $\forall x \in \mathbf{R}^*,\ \text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, \dfrac{1}{x} = \begin{cases} +\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

- **Arcs doubles**

  1/ $\forall x \in [-1,1],\ \sin 2\,\text{Arcsin}\, x = \sin 2\,\text{Arccos}\, x = 2x\sqrt{1-x^2}$

  2/ $\forall x \in [-1,1],\ \cos 2\,\text{Arcsin}\, x = -\cos 2\,\text{Arccos}\, x = 1 - 2x^2$

  3/ $\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{-1,+1\},\ \tan 2\,\text{Arctan}\, x = \dfrac{2x}{1-x^2}$

3. Fonctions hyperboliques

3.1. Définitions

Les fonctions **cosinus hyperbolique**, **sinus hyperbolique**, **tangente hyperbolique** notées respectivement ch, sh et th sont définies pour $x \in \mathbf{R}$ par :

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

ch est la *partie paire* de l'exponentielle, sh en est la *partie impaire* (Voir Figure 3). La fonction th est une fonction impaire (Voir Figure 4).

$$\forall x \in \mathbf{R}, \begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x & = e^x \\ \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x & = e^{-x} \end{cases}$$

On obtient ainsi l'identité fondamentale :

$$\boxed{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1}$$

Les fonctions ch, sh et th sont indéfiniment dérivables sur $\mathbf{R}$ et :

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R}, (\operatorname{sh})'(x) = \operatorname{ch} x, (\operatorname{ch})'(x) = \operatorname{sh} x, (\operatorname{th})'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x}$$

Les limites à l'infini sont :

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{ch} x = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{sh} x = +\infty, \ \lim_{x\to+\infty} \operatorname{th} x = 1$$

On retiendra aussi :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{ch} x}{\frac{e^x}{2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sh} x}{\frac{e^x}{2}} = 1$$

$$\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = \lim_{x\to0} \frac{\operatorname{th} x}{x} = 1, \ \lim_{x\to0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\frac{x^2}{2}} = 1$$

Le nom de *fonctions hyperboliques* est justifié par le fait que

$$(x = \operatorname{ch} t, y = \operatorname{sh} t)$$

est un paramétrage de la branche d'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$ avec $x > 0$ (Voir Figure 5).

3.2. Formulaire

a, b, p, q, x désignent des réels.

- **Addition**

  1/ $\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b$

  2/ $\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b$

  3/ $\operatorname{th}(a+b) = \dfrac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \operatorname{th} b}$

- **Duplication**

  1/ $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 2\operatorname{ch}^2 x - 1 = 1 + 2\operatorname{sh}^2 x$

  2/ $\operatorname{sh}^2 x = \dfrac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}$ et $\operatorname{ch}^2 x = \dfrac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}$

  3/ $\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$

  4/ $\operatorname{th} 2x = \dfrac{2\operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}$

Si on pose $t = \operatorname{th} \dfrac{x}{2}$ alors :

$$\operatorname{ch} x = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \operatorname{sh} x = \frac{2t}{1-t^2}, \operatorname{th} x = \frac{2t}{1+t^2}$$

- **Transformation de produit en somme**

  1/ $\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b = \dfrac{1}{2}\left(\operatorname{ch}(a+b) + \operatorname{ch}(a-b)\right)$

  2/ $\operatorname{sh} a \operatorname{sh} b = \dfrac{1}{2}\left(\operatorname{ch}(a+b) - \operatorname{ch}(a-b)\right)$

  3/ $\operatorname{sh} a \operatorname{ch} b = \dfrac{1}{2}\left(\operatorname{sh}(a+b) + \operatorname{sh}(a-b)\right)$

- **Transformation de somme en produit**

  1/ $\operatorname{ch} p + \operatorname{ch} q = 2 \operatorname{ch} \dfrac{p+q}{2} \operatorname{ch} \dfrac{p-q}{2}$

  2/ $\operatorname{ch} p - \operatorname{ch} q = 2 \operatorname{sh} \dfrac{p+q}{2} \operatorname{sh} \dfrac{p-q}{2}$

  3/ $\operatorname{sh} p + \operatorname{sh} q = 2 \operatorname{sh} \dfrac{p+q}{2} \operatorname{ch} \dfrac{p-q}{2}$

  4/ $\operatorname{th} p + \operatorname{th} q = \dfrac{\operatorname{sh}(p+q)}{\operatorname{ch} p \operatorname{ch} q}$

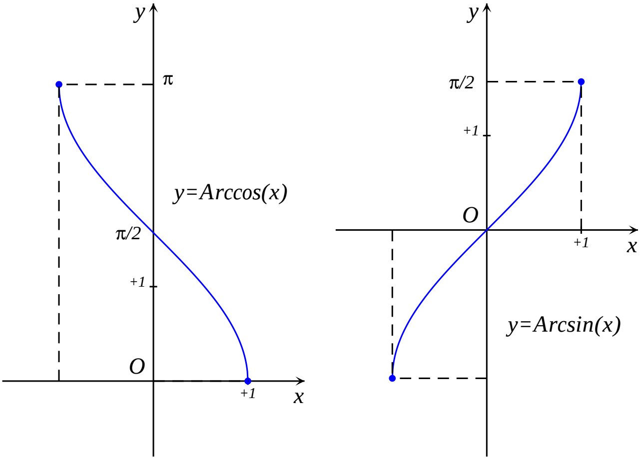

FIG. 1 – Représentations de Arcsin et Arccos

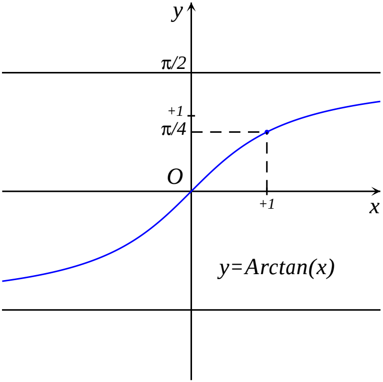

FIG. 2 – Représentation de Arctan

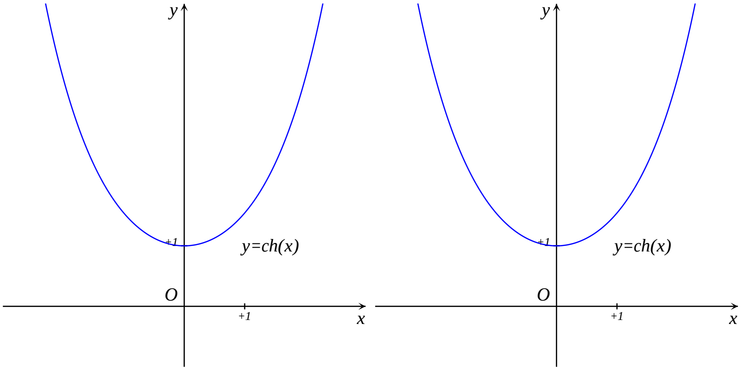

FIG. 3 – Représentation de ch et sh

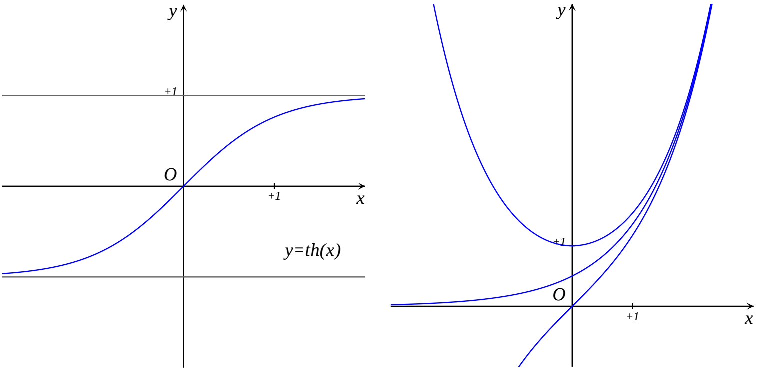

FIG. 4 – Représentation de th et comparaison de ch et sh

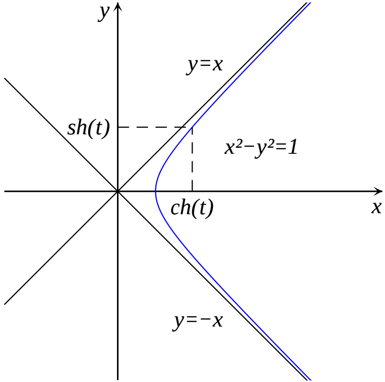

FIG. 5 – Hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$