

Une librairie pour la loi Normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec GNU BC & PSTricks

Dariussh GHORNBANZADEH

6 avril 2009

<http://www.cnam.fr/maths/Membres/ghorbanzadeh/>

1 Introduction

Dans ce papier nous allons présenter une librairie pour la représentation graphique et le calcul de la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, qui est parfois appelée la loi de *Gauss*.

Par convention la densité et la fonction de répartition de la loi normale centrée-réduite $\mathcal{N}(0, 1)$ sont notées :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{et} \quad \Phi(x) = \mathbb{P}(\mathcal{N}(0, 1) \leq x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$$

La densité et la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ s'expriment en fonction de φ et Φ :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{et} \quad F(x) = \mathbb{P}(\mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \leq x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

2 Calcul de Φ avec GNU BC

Pour calculer Φ , on utilise l'algorithme 26.2.17 de Abramowitz and Stegun, [Handbook of Mathematical Functions](#).

Pour $x \geq 0$, l'approximation de $\Phi(x)$ est donnée par :

$$\Phi(x) = 1 - \varphi(x) (b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5) + \varepsilon$$
$$\text{où } t = \frac{1}{1 + 0.2316419x}$$

avec $|\varepsilon| < 7.5 \cdot 10^{-8}$ et

$$b_1 = 0.319381530 \quad b_2 = -0.356563782 \quad b_3 = 1.781477937$$
$$b_4 = -1.821255978 \quad b_5 = 1.33027442$$

Pour $x < 0$, on utilise la relation : $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

La librairie suivante en langage GNU BC donne la valeur de Φ :

```
58 /* fonction de répartition de loi N(mu,sigma2) */
59 define normaleg_fdr(x,mu,sigma)
60 {
61     auto y;
62     y=(x-mu)/sqrt(sigma);
63     return normale_fdr(y);
64 }
65
66 /* calcul de Phi(x) */
67
68 define normale_fdr(x)
69 {
70     auto t,b1,b2,b3,b4,b5,p,c;
71
72     b1=0.319381530;
73     b2=-0.356563782;
74     b3=1.781477937;
75     b4=-1.821255978;
76     b5=1.330274429;
77     p =0.2316419;
78     c =0.39894228;
79     t = 1/(1 + p*valabs(x));
80     if(x >= 0) return (1-c*e(-x*x/2)*t*(t*(t*(t*(t*b5+b4)+b3)+b2)+b1));
81     return (c * e(-x*x/2)* t*(t*(t*(t*(t*b5+b4)+b3)+b2)+b1));
82 }
83
84 define valabs(x)
85 {
86     if(x >= 0) return (x);
87     return (-x);
88 }
```

Le calcul de Φ est fait pour quatre zones décrites par le tableau suivant :

zone	probabilité
UniInf(a)	$\mathbb{P}(\mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \leq a)$
UniSup(b)	$\mathbb{P}(\mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \geq b)$
BiInt(a,b)	$\mathbb{P}(a \leq \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \leq b)$
BiExt(a,b)	$\mathbb{P}(\mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \leq a) + \mathbb{P}(\mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \geq b)$

2.1 Récupération des résultats calculés par BC

Pour récupérer les résultats correspondant à chaque zone, calculés par BC, nous avons les commandes suivantes :

2.1.1 Zone : UniInf

```

94 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Zone UniInf %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
95 % #1 fichier contenant le résultat des calculs
96 % #2 seuil (pour UniInf )
97 % #3 mu
98 % #4 sigma
99 % #5 précision (chiffres après la virgule)
100
101 \newcommand{\ResultatBCUniInf}[5][NormalR]{%
102 \immediate\openout\FichierBC #1.bc
103 \immediate\write\FichierBC{scale=#5;}
104 \immediate\write\FichierBC{print "\noexpand$\noexpand\\NormalUniInf{#3}{#4}{#2} =
105     ",(normaleg_fdr(#2,#3,#4))/1, "$";}
106 \immediate\write\FichierBC{quit}
107 \immediate\closeout\FichierBC
108 }

```

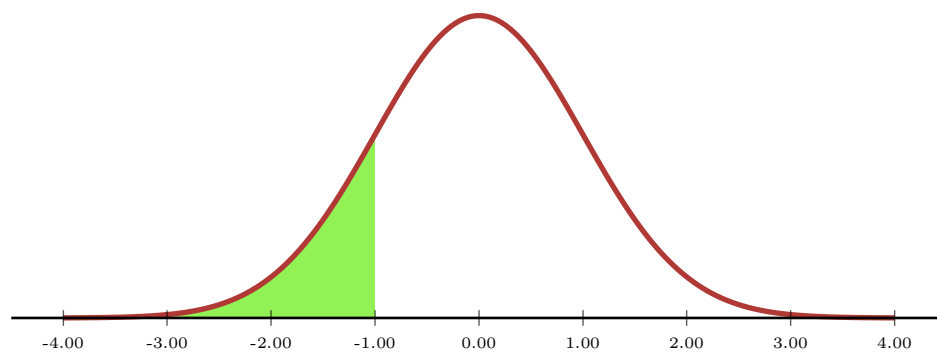


Figure 1 – graphe de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ avec $\mathbb{P}(\mathcal{N}(0, 1) \leq -1) = .158654$

2.1.2 Zone : UniSup

```

108 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Zone UniSup %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
109 % #1 fichier contenant le résultat des calculs
110 % #2 seuil (pour UniSup)
111 % #3 mu
112 % #4 sigma
113 % #5 précision (chiffres après la virgule)
114
115 \newcommand{\ResultatBCUniSup}[5][NormalR]{%
116 \immediate\openout\FichierBC #1.bc
117 \immediate\write\FichierBC{scale=#5;}
118 \immediate\write\FichierBC{print "\noexpand$\noexpand\\NormalUniSup{#3}{#4}{#2} =
119 ",(1-normaleg_fdr(#2,#3,#4))/1, "$";}
120 \immediate\write\FichierBC{quit}
121 \immediate\closeout\FichierBC
122 }

```

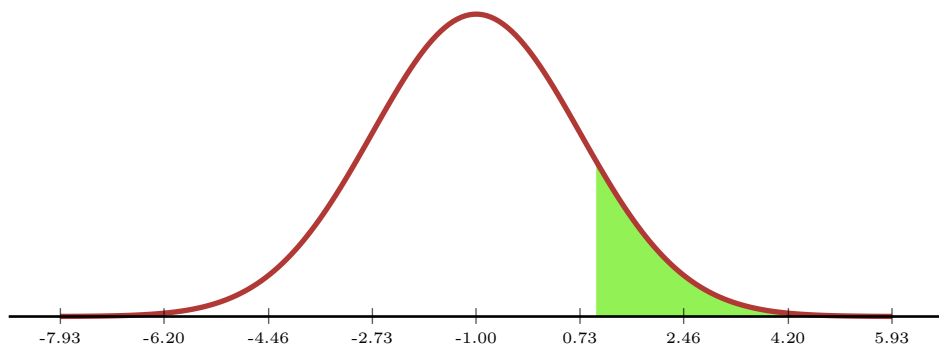


Figure 2 – graphe de la loi $\mathcal{N}(-1, 3)$ avec $\mathbb{P}(\mathcal{N}(-1, 3) \geq 1) = .124105$

2.1.3 Zone : BiInt

```

122 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Zone BiInt %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
123 % #1 fichier contenant le résultat des calculs
124 % #2 seuil (pour a)
125 % #3 seuil (pour b)
126 % #4 mu
127 % #5 sigma
128 % #6 précision (chiffres après la virgule)
129
130 \newcommand{\ResultatBCBiInt}[6][NormalR]{%
131 \immediate\openout\FichierBC #1.bc
132 \immediate\write\FichierBC{scale=#6;}
133 \immediate\write\FichierBC{print "\noexpand$\noexpand\\NormalBiInt{#4}{#5}{#2}{#3}
134 = ",(normaleg_fdr(#3,#4,#5)-normaleg_fdr(#2,#4,#5))/1, "$";}
135 \immediate\write\FichierBC{quit}
136 \immediate\closeout\FichierBC
137 }

```

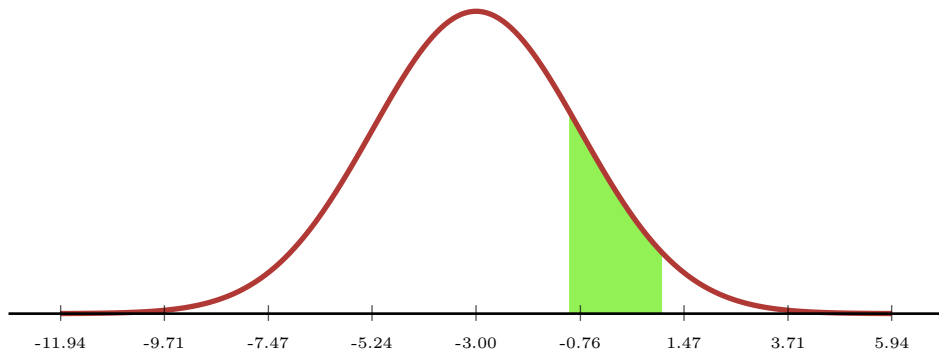


Figure 3 – graphe de la loi $\mathcal{N}(-3, 5)$ avec $\mathbb{P}(-1 \leq \mathcal{N}(-3, 5) \leq 1) = .148727$

2.1.4 Zone : BiExt

```

137 %%%%%%%%%% Zone BiExt %%%%%%%%%%
138 % #1 fichier contenant le résultat des calculs
139 % #2 seiul (pour a )
140 % #3 seiul (pour b )
141 % #4 mu
142 % #5 sigma
143 % #6 précision (chiffres après la virgule)
144
145 \newcommand{\ResultatBCBiExt}[6][NormalR]{%
146 \immediate\openout\FichierBC #1.bc
147 \immediate\write\FichierBC{scale=#6;}
148 \immediate\write\FichierBC{print "\noexpand$\noexpand\\NormalBiExt{#4}{#5}{#2}{#3}
    = ",(normaleg_fdr(#2,#4,#5)+1-normaleg_fdr(#3,#4,#5))/1, "$";}
149 \immediate\write\FichierBC{quit}
150 \immediate\closeout\FichierBC
151 }

```

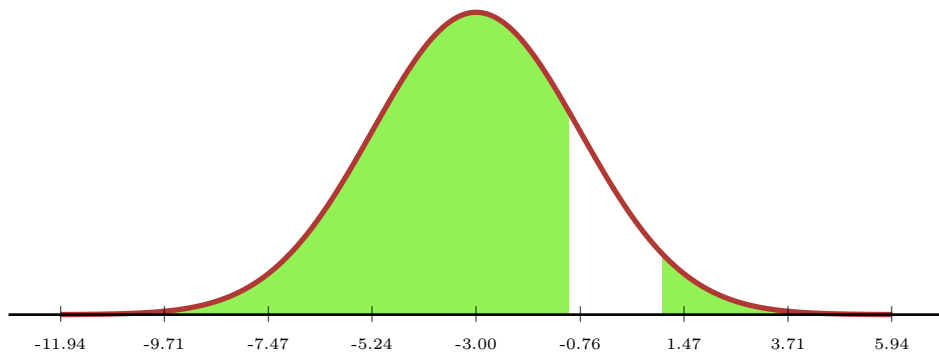


Figure 4 – graphe de la loi $\mathcal{N}(-3, 5)$ avec $\mathbb{P}(\mathcal{N}(-3, 5) \leq -1) + \mathbb{P}(\mathcal{N}(-3, 5) \geq 1) = .851272$

2.2 Appel à GNU BC à partir de L^AT_EX

Avec la commande `\immediate\write18` de L^AT_EX on fait appel à Bc :

```
152 %%%%%%%%%%%%% Appel à bc %%%%%%%%%%%%%%
153 % répertoire de bc.exe : C:/GnuWin32/bin/
154 % \executBC{#1}{#2}{#3}
155 % #1 librairie BC
156 % #2 fichier contenant les commandes en BC
157 % #3 fichier en sortie
158 \newcommand{\executBC}[3][NormalLib]{
159 \immediate\write18{C:/GnuWin32/bin/bc.exe -q -l #1.b #2 > #3 }
160 }
```

3 Les IHMs de la librairie

La librairie contient les quatres IHMs suivantes :

- IHM pour inclure les résultats dans le corps du document.
- IHM pour la représentation graphique avec PSTricks.
- IHM pour la table statistique de la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

3.1 IHM pour inclure les résultats dans le corps du document

Pour inclure les résultats dans le corps du document, avec le module `xkeyval`, on a l'IHM qui contient la commande `\NormalEcrire` :

`\NormalEcrire[μ , σ ,Binf,Bsup,precision,zone]`

Les paramètres de `\NormalEcrire` prennent les valeurs suivantes :

Paramètres	valeurs
mu	μ
sigma	σ^2
Binf	la borne pour la région UniInf ou BiInt ou BiExt
Bsup	la borne pour la région UniSup ou BiInt ou BiExt
precision	pour afficher le nombre de chiffres après la virgule des résultats
zone	aire à calculer (UniInf ,UniSup ,BiInt , BiExt)

Exemples

① Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(1, 7)$, calculer la probabilité $\mathbb{P}(X \leq 3)$.

◀▶ Pour inclure le résultat, on fait appel à la commande `\NormalEcrire` :

La probabilité demandée est égale à :
`\NormalEcrire[mu=1,sigma=7,Binf=3,precision=5,zone=UniInf]`

La probabilité demandée est égale à : $\mathbb{P}(\mathcal{N}(1, 7) \leq 3) = .77515$

② Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(-6, 11)$, calculer la probabilité $\mathbb{P}(X \geq -3)$.

◀▶ Pour inclure le résultat, on fait appel à la commande `\NormalEcrire` :

La probabilité demandée est égale à :
`\NormalEcrire[mu=-6,sigma=11,Bsup=-3,precision=6,zone=UniSup]`

La probabilité demandée est égale à : $\mathbb{P}(\mathcal{N}(-6, 11) \geq -3) = .182855$

③ Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(-4, 13)$, calculer la probabilité $\mathbb{P}(|X| \leq 2)$.

◀▶ Pour inclure le résultat, on fait appel à la commande `\NormalEcrire` :

La probabilité demandée est égale à :
`\NormalEcrire[mu=-4,sigma=13,Binf=-2, Bsup=2,precision=7,zone=BiInt]`

La probabilité demandée est égale à : $\mathbb{P}(-2 \leq \mathcal{N}(-4, 13) \leq 2) = .2415036$

④ Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(10, 19)$, calculer la probabilité $\mathbb{P}(|X| \geq 5)$.

◀▶ Pour inclure le résultat, on fait appel à la commande `\NormalEcrire` :

La probabilité demandée est égale à :
`\NormalEcrire[mu=10,sigma=19,Binf=-5, Bsup=5,precision=5,zone=BiExt]`

La probabilité demandée est égale à : $\mathbb{P}(\mathcal{N}(10, 19) \leq -5) + \mathbb{P}(\mathcal{N}(10, 19) \geq 5) = .87461$

3.2 IHM pour la représentation graphique avec PSTricks

Pour graphe de la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, on utilise l'environnement `pspicture` de PSTricks. Les paramètres de `pspicture` sont calculés en fonction de μ et σ .

Avec le module `xkeyval`, on a l'IHM qui contient la commande `\Normaleplot` :

`\Normaleplot[mu,sigma,Binf,Bsup,xechelle,yechelle, nbpoints, couleurz, couleurc,precision,zone]`

Les paramètres de `\Normaleplot` prennent les valeurs suivantes :

Paramètres	valeurs
mu	μ
sigma	σ^2
Binf	la borne pour la région UniInf ou BiInt ou BiExt
Bsup	la borne pour la région UniSup ou BiInt ou BiExt
xechelle	<code>xunit</code> de <code>pspicture</code>
yechelle	<code>yunit</code> de <code>pspicture</code>
nbpoints	le nombre de points pour <code>plotpoints</code>
couleurz	couleur de la région à hachurer
couleurc	couleur de la courbe
precision	pour afficher le nombre de chiffres après la virgule des résultats
zone	aire à hachurer (UniInf ,UniSup ,BiInt , BiExt)

Exemples

⑤ Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(12, 8)$, calculer la probabilité $\mathbb{P}(X \leq 14)$.

▶ Pour la représentation graphique, on utilise la commande : `\Normaleplot`

```
\Normaleplot[mu=12,sigma=8,Binf=14,yechelle=4,zone=UniInf]
```

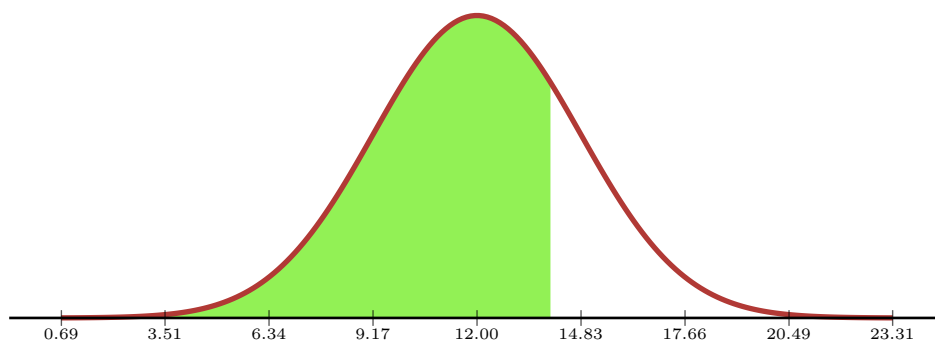


Figure 5 – graphe de la loi $\mathcal{N}(12, 8)$ avec $\mathbb{P}(\mathcal{N}(12, 8) \leq 14) = .760250$

⑥ Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(8, 23)$, calculer la probabilité $\mathbb{P}(X \geq 9)$.

▶ Pour la représentation graphique, on utilise la commande : `\Normaleplot`

```
\Normaleplot[mu=8,sigma=23,Bsup=9 ,yechelle=4, couleurz=yellow ,zone=UniSup]
```

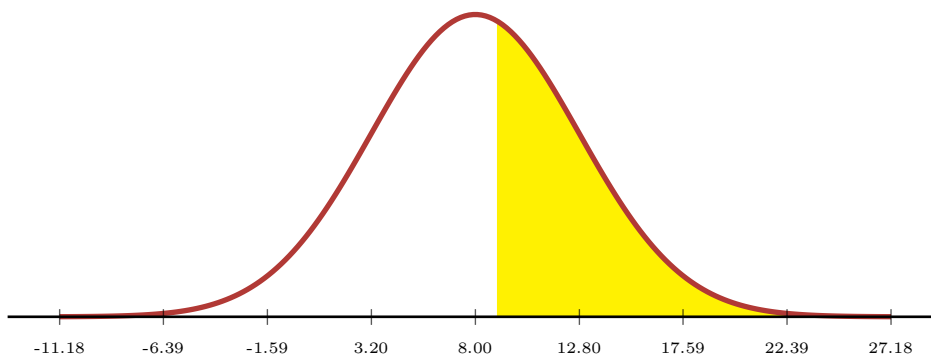


Figure 6 – graphe de la loi $\mathcal{N}(8, 23)$ avec $\mathbb{P}(\mathcal{N}(8, 23) \geq 9) = .417412$

7 Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(8, 18)$, calculer la probabilité $\mathbb{P}(|X| \leq 3)$.

► Pour la représentation graphique, on utilise la commande : `\Normaleplot`

```
\Normaleplot[mu=8,sigma=18,Binf=-3,Bsup=3 ,yechelle=4, couleurz=gray!40,zone=BiInt]
```

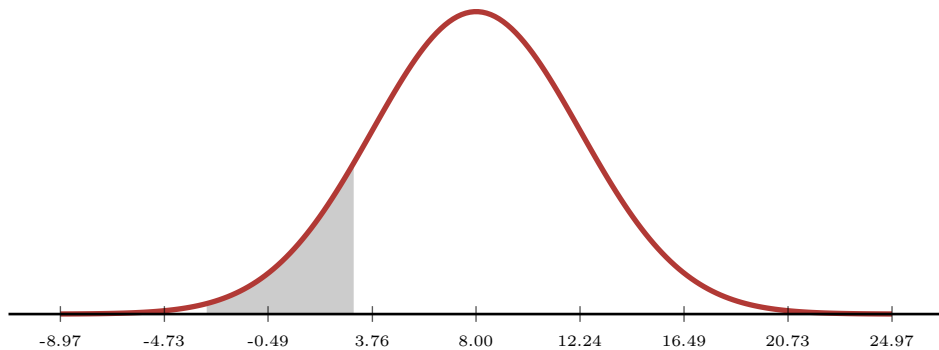


Figure 7 – graphe de la loi $\mathcal{N}(8, 18)$ avec $\mathbb{P}(-3 \leq \mathcal{N}(8, 18) \leq 3) = .114535$

8 Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(4, 16)$, calculer la probabilité $\mathbb{P}(|X| > 2)$.

► Pour la représentation graphique, on utilise la commande : `\Normaleplot`

```
\Normaleplot[mu=4,sigma=16,Binf=-2,Bsup=2 ,yechelle=4, couleurz=green!60,zone=BiExt]
```

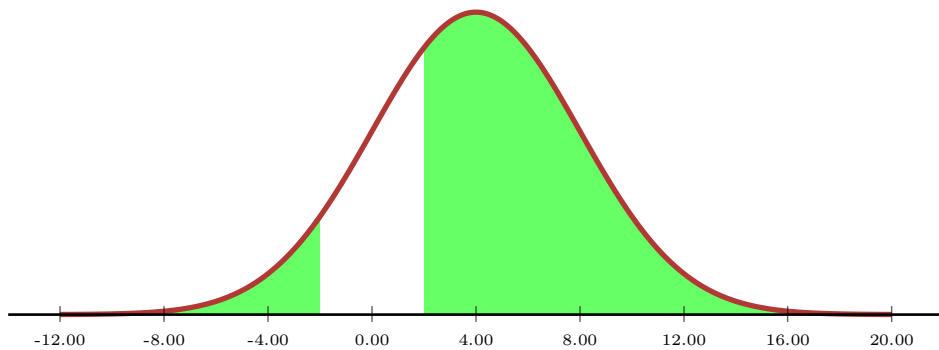


Figure 8 – graphe de la loi $\mathcal{N}(4, 16)$ avec $\mathbb{P}(\mathcal{N}(4, 16) \leq -2) + \mathbb{P}(\mathcal{N}(4, 16) \geq 2) = .758269$

3.3 IHM pour la table statistique de la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

La table statistique de la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ est calculée pour 100 valeurs appartenant à l'intervalle $[a, b]$. On a l'IHM qui contient la commande `\NormalTable` :

`\NormalTable[mu,sigma,a,b,precision]`

Les paramètres de `\NormalTable` prennent les valeurs suivantes :

Paramètres	valeurs
mu	μ
sigma	σ^2
a	la borne inférieure
b	la borne supérieure
precision	pour afficher le nombre de chiffres après la virgule des résultats

la commande `\NormalTable` crée le fichier : `NormalTable.tex` qui pourrait être utilisé dans un autre document.

Les valeurs par défaut de `\NormalTable` sont `mu=0` et `sigma=1` sur l'intervalle $[-4,4]$; les résultats sont affichés avec six chiffres après la virgule.

Exemples

- ⑨ Pour la table statistique de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ sur l'intervalle $[-4,4]$, la commande est : `\NormalTable` qui produit la table suivante :

$$F(x) = \mathbb{P}(\mathcal{N}(0, 1) \leq x)$$

x	$F(x)$	x	$F(x)$	x	$F(x)$	x	$F(x)$
-4.000000	.000031	-1.979798	.023862	.040404	.516115	2.060606	.980329
-3.919192	.000044	-1.898990	.028782	.121212	.548238	2.141414	.983879
-3.838384	.000061	-1.818182	.034518	.202020	.580050	2.222222	.986865
-3.757576	.000085	-1.737374	.041160	.282828	.611345	2.303030	.989361
-3.676768	.000118	-1.656566	.048803	.363636	.641935	2.383838	.991433
-3.595960	.000161	-1.575758	.057540	.444444	.671640	2.464646	.993142
-3.515152	.000219	-1.494950	.067463	.525252	.700296	2.545454	.994543
-3.434344	.000296	-1.414142	.078659	.606060	.727763	2.626262	.995683
-3.353536	.000398	-1.333334	.091210	.686868	.753917	2.707070	.996606
-3.272728	.000532	-1.252526	.105188	.767676	.778661	2.787878	.997347
-3.191920	.000706	-1.171718	.120654	.848484	.801916	2.868686	.997939
-3.111112	.000931	-1.090910	.137656	.929292	.823631	2.949494	.998408
-3.030304	.001221	-1.010102	.156222	1.010101	.843777	3.030303	.998778
-2.949495	.001591	-.929293	.176368	1.090909	.862343	3.111111	.999068
-2.868687	.002060	-.848485	.198083	1.171717	.879345	3.191919	.999293
-2.787879	.002652	-.767677	.221338	1.252525	.894810	3.272727	.999467
-2.707071	.003393	-.686869	.246082	1.333333	.908788	3.353535	.999601
-2.626263	.004316	-.606061	.272236	1.414141	.921339	3.434343	.999703
-2.545455	.005456	-.525253	.299703	1.494949	.932536	3.515151	.999780
-2.464647	.006857	-.444445	.328359	1.575757	.942459	3.595959	.999838
-2.383839	.008566	-.363637	.358064	1.656565	.951196	3.676767	.999881
-2.303031	.010638	-.282829	.388653	1.737373	.958839	3.757575	.999914
-2.222223	.013133	-.202021	.419949	1.818181	.965481	3.838383	.999938
-2.141415	.016120	-.121213	.451759	1.898989	.971217	3.919191	.999955
-2.060607	.019670	-.040405	.483884	1.979797	.976137	4.000000	.999968

Table 1 – Table de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$

10 Pour la table statistique de la loi $\mathcal{N}(4,6)$ sur l'intervalle $[-2,2]$, la commande est :
`\NormalTable[mu=4,sigma=16,a=-2,b=2 ,precision=5]` qui produit la table suivante :

$$F(x) = \mathbb{P}(\mathcal{N}(4, 16) \leq x)$$

x	$F(x)$	x	$F(x)$	x	$F(x)$	x	$F(x)$
-2.00000	.06680	-.98990	.10611	.02020	.15987	1.03030	.22891
-1.95960	.06812	-.94950	.10797	.06060	.16234	1.07070	.23198
-1.91920	.06946	-.90910	.10985	.10101	.16484	1.11111	.23507
-1.87879	.07082	-.86869	.11176	.14141	.16736	1.15151	.23819
-1.83839	.07219	-.82829	.11369	.18181	.16990	1.19191	.24132
-1.79798	.07359	-.78788	.11565	.22222	.17246	1.23232	.24449
-1.75758	.07501	-.74748	.11763	.26262	.17506	1.27272	.24767
-1.71718	.07645	-.70708	.11963	.30303	.17767	1.31313	.25088
-1.67677	.07792	-.66667	.12167	.34343	.18032	1.35353	.25410
-1.63637	.07940	-.62627	.12372	.38383	.18298	1.39393	.25735
-1.59596	.08090	-.58586	.12579	.42424	.18567	1.43434	.26062
-1.55556	.08243	-.54546	.12790	.46464	.18838	1.47474	.26390
-1.51516	.08397	-.50506	.13002	.50505	.19112	1.51515	.26722
-1.47475	.08554	-.46465	.13217	.54545	.19389	1.55555	.27055
-1.43435	.08713	-.42425	.13434	.58585	.19667	1.59595	.27391
-1.39394	.08875	-.38384	.13654	.62626	.19948	1.63636	.27728
-1.35354	.09038	-.34344	.13876	.66666	.20232	1.67676	.28067
-1.31314	.09203	-.30304	.14101	.70707	.20518	1.71717	.28409
-1.27273	.09372	-.26263	.14329	.74747	.20806	1.75757	.28752
-1.23233	.09542	-.22223	.14558	.78787	.21097	1.79797	.29098
-1.19192	.09714	-.18182	.14790	.82828	.21390	1.83838	.29445
-1.15152	.09889	-.14142	.15025	.86868	.21685	1.87878	.29794
-1.11112	.10066	-.10102	.15261	.90909	.21984	1.91919	.30145
-1.07071	.10245	-.06061	.15501	.94949	.22283	1.95959	.30498
-1.03031	.10426	-.02021	.15743	.98989	.22586	2.00000	.30853

Table 2 – Table de la loi $\mathcal{N}(4, 16)$

4 Compilation

Pour utiliser la librairie, la compilation des documents se fait avec l'option `--shell-escape` .

Pour *MikTeX* : `latex -enable-write18 doc.tex` .

```
\documentclass[12pt]{article}
\usepackage[latin1]{inputenc}
\usepackage[T1]{fontenc}
\usepackage[french]{babel}
\usepackage{amssymb,amscd,latexsym,amsmath,amstext}

\input{Normale-Bc.tex} % appel à la librairie

\begin{document}
Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi  $\mathcal{N}(1,7)$ ,
calculer la probabilité  $\mathbb{P}(X \leq 3)$ .
Pour inclure le résultat, on fait appel à la commande \NormalEcrire + :
La probabilité demandée est égale à :
\NormalEcrire[mu=1,sigma=7,Binf=3,precision=5,zone=UniInf]
\end{document}
```

Table des matières

1 Introduction	1
2 Calcul de Φ avec GNU BC	2
2.1 Récupération des résultats calculés par BC	3
2.1.1 Zone : UniInf	3
2.1.2 Zone : UniSup	4
2.1.3 Zone : BiInt	4
2.1.4 Zone : BiExt	5
2.2 Appel à GNU BC à partir de \LaTeX	6
3 Les IHMs de la librairie	6
3.1 IHM pour inclure les résultats dans le corps du document	6
3.2 IHM pour la représentation graphique avec PSTricks	8
3.3 IHM pour la table statistique de la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	11
4 Compilation	15