Cours de mathématiques

Terminale S1

Chapitre 5 : Fonction exponentielle

Année scolaire 2008-2009
mise à jour 22 novembre 2008

Fig. 1 – Paul Dirac

Ponctuellement, avoir le sens de la mesure.

Table des matières

Le document s'inspire des nombreux livres de Terminale S des différentes éditions. Les figures de ce document ont été réalisées avec métapost et les macros de J-M Sarlat. L'environnement bclogo, utilisé pour la réalisation de ce document , est téléchargeable ici :
http://melusine.eu.org/syracuse/wiki/doku.php/mc/bclogo

I Chapitre 5 : Fonction exponentielle

I.A Introduction(fiche)

I.A.1 Désintégration des noyaux radioactifs

Les noyaux des atomes d'un corps radioactif se désintègrent selon la loi suivante : si $N(t)$ est le nombre de noyaux présents à l'instant t, pendant la durée $\triangle t$,la variation $\triangle N(t)$ du nombre de noyaux est proportionnelle à $\triangle t$ et à $N(t)$.
Les physiciens écrivent :

$$\triangle N(t) = -kN(t)\triangle t \text{ pour } k \succ 0$$

En supposant que la fonction $N : t \longmapsto N(t)$ soit dérivable sur $\mathbb{R}$, expliquez pourquoi on peut écrire , pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$N'(t) = -kN(t)$$

I.A.2 Un processus "sans mémoire"

On dit que la durée de vie de certains composants électroniques est sans vieillissement (ou sans mémoire) au sens suivant : si $f(t)$ est la probabilité que la durée de vie dépasse la durée t, alors,pour tout t et t' :

$$f(t + t') = f(t) \times f(t')$$

(*cette égalité sera expliquée plus tard au cours de l'année*)
Dans la suite, on considère une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$,non nulle, vérifiant pour tout x et y :

$$f(x + y) = f(x) \times f(y)$$

1. Montrer que $f(0) = 1$ et que,pour tout x réel ,$f(x)$ est strictement positif.
2. On pose : $k = f'(0)$.
   (a) Soit a fixé,calculer la dérivée de la fonction $\Psi : x \longmapsto f(x + a) - f(a)f(x)$
   (b) En posant $x = 0$ en déduire que : $f'(a) = kf(a)$

La partie précédente a permis de montrer le résultat suivant :

si $f$est non nulle et dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie,pour tout x et y

$$f(x + y) = f(x) \times f(y)$$

alors f vérifie les conditions : ♣ $f(0) = 1$ et $f' = kf$ ♣.

I.A.3 Propriétés de telles fonctions

Soit f une fonction vérifiant ♣...♣ avec $k \neq 0$

1. Montrer que $\boxed{f'(0) = k}$
2. Soit a un réel fixé.On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{g(x) = f(x + a)f(-x)}$.
   (a) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(x)$.
   (b) Calculer $g(0)$.En déduire que,pour tout x et a réels :$\boxed{f(x + a)f(-x) = f(a)}$ (1).
3. Déduire de (1) les résultats suivants :

(a) pour tout réel x, $\boxed{f(x)f(-x) = 1}$.

(b) f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$

(c) pour tous réels a et x :$\boxed{f(x+a) = f(x)f(a)}$.

4. **unicité de la fonction**

On suppose ici qu'il existe deux fonctions f_1 et f_2 dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant

$$\boxed{f_1(0) = 1 \text{ et } f_1' = kf_1} \text{ et } \boxed{f_2(0) = 1 \text{ et } f_2' = kf_2}.$$

(a) Soit φ la fonction définie par :$\boxed{\varphi(x) = f_1(x)f_2(-x)}$.Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ calculer sa dérivée .

(b) En déduire que ,pour tout x réel ,$\boxed{\varphi(x) = 1}$.

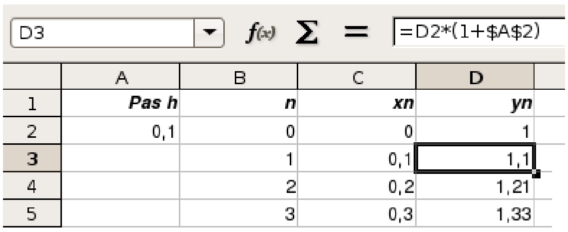
(c) A l'aide du résultat de la question 3.(a),conclure que les deux fonctions f_1 et f_2 sont égales.

I.A.4 La fonction exponentielle

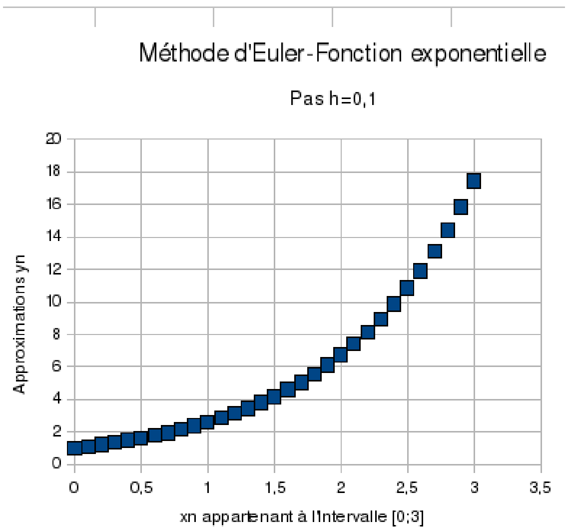
Les séquences précédentes ont montré les propriétés que possède une fonction vérifiant la condition ♣ ....♣.On admet l'existence d'une telle fonction.
On appellera celle-ci *fonction exponentielle*.

I.B TP Info : Métode d'Euler et fonction exponentielle

Dans le Devoir 8, vous avez tracé une courbe sur l'intervalle $[0;3]$ qui approxime celle d'une fonction f vérifiant la condition initiale $f(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)$, en utilisant la méthode d'Euler avec un pas $h = 0.1$.
Il est clair que vous vous êtes confrontés à la fonction exponentielle pour la première fois.
En utilisant un tableur,comme par exemple celui d' *Openoffice* ,on peut obtenir ceci :


D3 =D2*(1+A2)

	A	B	C	D
1	Pas h	n	xn	yn
2	0,1	0	0	1
3		1	0,1	1,1
4		2	0,2	1,21
5		3	0,3	1,33

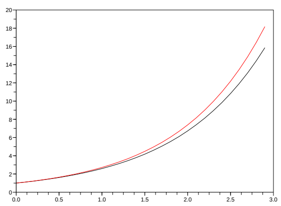
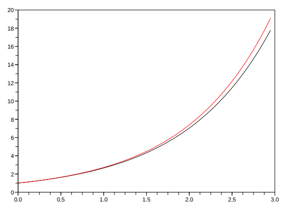
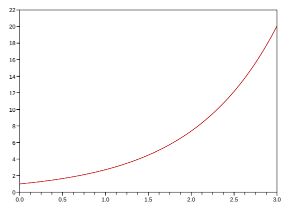


Nous pouvons aussi utiliser *SCILAB* pour appliquer la méthode d'Euler,qui a été exposée précédemment.
Nous savons que la fonction f que l'on étudie ici est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie $f(0) = 1$ et ,pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)$.
Nous allons utiliser *SCILAB* pour écrire un programme qui applique la méthode d'Euler sur $[0;b]$.

1. <u>Programme source</u>

```
function y=euler(b,h)
// h représente le pas,c'est à dire la longueur d'une subdivision
n=floor(b/h) ;
//la commande floor calcule la partie entière de b/h et donne donc le nombre de subdivisions de l'intervalle
x=0 :h :(n-1)*h ;
y(1)=1 ;
for i=2 :n ;y(i)=y(i-1)+y(i-1)*h ;end
plot2d(x,y),plot2d(x,exp(x),style=5)
endfunction
//Prenons b=3 dans le sous-programme euler(b,h) euler(3,0.1)
```

2. <u>Applications</u>
   Nous remarquons que le programme source demande de faire l'étude avec un pas de 0.1. Voici les courbes obtenues pour des pas égaux respectivement à 0.1 ,0.05 et enfin 0.001,la courbe de la fonction exponentielle étant tracée en rouge.

3. Nous constatons que,plus le pas h est petit,plus la courbe obtenue se rapproche de celle de la fonction exponentielle.

I.C Fonction exponentielle

I.C.1 Définition

Définition 1:

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, & f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$
Cette fonction est appelée *fonction exponentielle* et on note $f(x) = \exp(x)$.

Notation

On note e le nombre $\exp(1)$.
Pour avoir une valeur approchée de e, il suffit de revenir vers la méthode d'Euler utilisée dans la première partie du chapitre.
En effet, on a pu remarquer que $\exp(1) \approx \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, il suffit pour cela de prendre comme pas $h = \dfrac{1}{n}$.
En prenant une valeur de n suffisamment grande, on trouve que $e \approx 2.718281828..$

I.C.2 Propriétés algébriques de la fonction exponentielle

Théorème 1

Pour tout réel x, $\exp(-x)\exp(x) = 1$ et $\exp(x) \neq 0$.

Théorème 2

Pour tous réels x et y, $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$

Théorème 3

Pour tous réels x , $\exp(x) > 0$

Théorème 4

$\forall x \in \mathbb{R}$ *et* $\forall y \in \mathbb{R}$,

1. $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.
2. $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$.
3. Pour tout entier relatif p, $\exp(px) = (\exp(x))^p$.

Remarque : Les précédents théorèmes ont été démontrés dans la première partie du document. Seule, la dernière propriété mérite de s'y attarder.
Il suffit de la démontrer par récurrence pour tout $p \in \mathbb{N}$ puis de poser $p = -q$ et d'utiliser le résultat démontré sur $\mathbb{N}$.

I.C.3 La notation e^x

L'égalité $\exp(px) = (\exp(x))^p$, $\forall p \in \mathbb{Z}$, donne pour $x = 1$: $\exp(p) = e^p$.
On admet alors, que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x$.[1]
Ce qui nous permet d'écrire :

Propriétés

$e^0 = 1$
$e^1 = e$
$\forall a \in \mathbb{R}$ et $\forall b \in \mathbb{R}$, $e^{a+b} = e^a e^b$; $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$; $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$.
et $\forall n \in \mathbb{Z}$, $(e^a)^n = e^{na}$.

[1] Je vous invite à voir le document qui traîte de la racine cubique de 2

I.D Etude de la fonction exponentielle

I.D.1 Variations

Sens de variation de la fonction exponentielle

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

En effet, la fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp'(x) = \exp(x)$. Donc, sachant que pour tout réel x, $\exp'(x) > 0$, la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On peut donc écrire :

1. Pour tous réels a et b, $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$.
2. Pour tous réels a et b, $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$.

I.D.2 Limites

Théorème 5

- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

Démonstration :
Soit ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\phi(x) = e^x - x$.
Comme différence de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^+$, ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\phi'(x) = e^x - 1$.
Et, sachant que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que $e^0 = 1$, pour tout réel $x \geq 0$, $e^x \geq 1$ et $g'(x) \geq 0$.
La fonction ϕ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, et comme $g(0) = 1$, on en déduit que pour tout $x \geq 0$, $\phi(x) \geq 1$, ce qui donne $e^x \geq x + 1$, donc $g(x) > x$.
On en déduit, par comparaison, sachant que $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, que

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

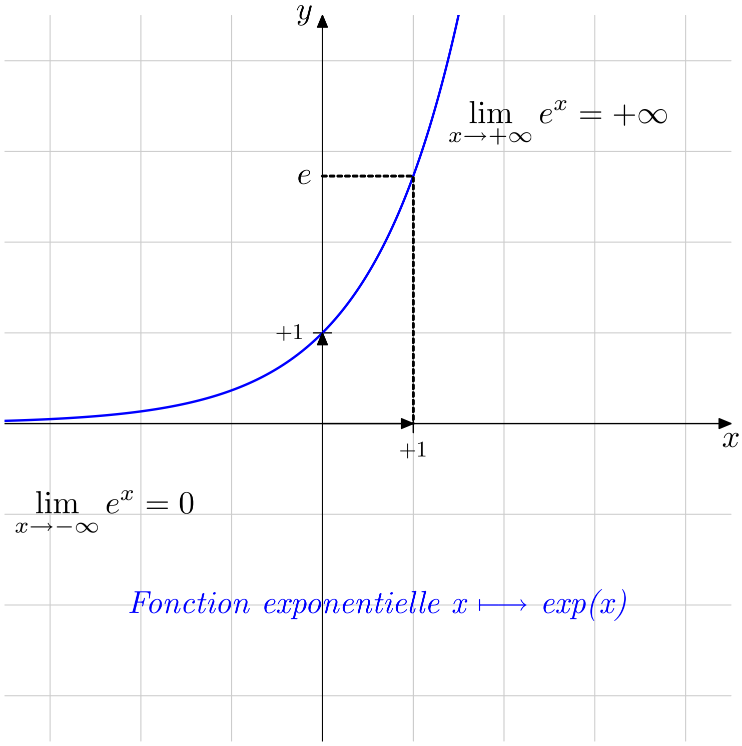
Pour la deuxième limite, on pose $e^x = \dfrac{1}{e^{-x}}$
Sachant que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$, on peut écrire :

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

Les résultats précédents nous permettent de dresser le tableau de variation de la fonction exponentielle :

x	$-\infty$	$+\infty$
$\exp'(x)$	$+$	
$\exp(x)$	0 ↗	$+\infty$

puis sa courbe représentative :



THÉORÈME 6

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

<u>Démonstration :</u> On démontre de la même manière que dans le théorème précédent que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

Soit ψ la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\psi(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$.

On peut, comme précédemmen, admettre que ψ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $\psi'(x) = e^x - x$

Et, pour tout $x \geq 0$, $e^x > x$, ce qui donne $\psi'(x) > 0$. Donc ψ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

De plus $\psi(0) = 1$, donc pour tout $x > 0$, $\psi(x) > 0$, c'est à dire $e^x > \dfrac{x^2}{2}$ et $\dfrac{e^x}{x} > \dfrac{x}{2}$.

Et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$, donc

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

On remarque que : $xe^x = -\dfrac{-x}{e^{-x}}$,

donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{-x}}{-x} = +\infty$,

donc

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$$

$\dfrac{e^x - 1}{x}$ est le taux d'accroissement entre 0 et x de la fonction exponentielle, que l'on sait dérivable en 0, donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \exp'(0) = 1$$

I.E Dérivée de la fonction e^u

THÉORÈME 7

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I. La fonction f définie par : $f(x) = e^{u(x)}$ est dérivable sur I et pour tout réel x de I, $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

Démonstration : Il suffit d'utiliser le théorème de dérivation de la composée de deux fonctions.