Cours de mathématiques

Terminale S1

Chapitre 8 : Probabilités-Indépendance

Année scolaire 2008-2009
mise à jour 26 janvier 2009

Fig. 1 – Andreï Kolmogorov

Un précurseur de la formalisation de la théorie des probabilités

Table des matières

Informations sur la mise en page

Le document s'inspire des nombreux livres de Terminale S des différentes éditions. Les figures de ce document ont été réalisées avec métapost et les macros de J-M Sarlat. L'environnement bclogo, utilisé pour la réalisation de ce document, est téléchargeable ici : http://melusine.eu.org/syracuse/wiki/doku.php/mc/bclogo

I Chapitre 8 : Probabilités-Indépendance-Probabilités conditionnelles

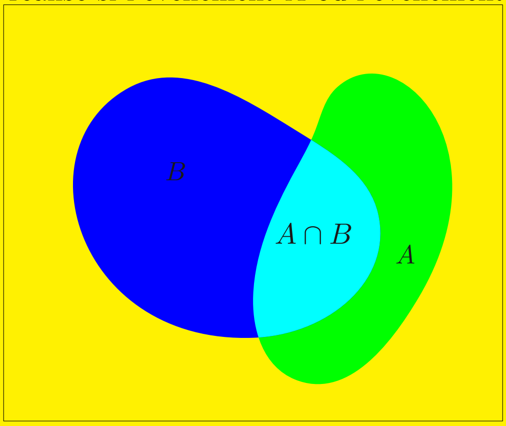
I.A Introduction(fiche)

I.B Rappels

I.B.1 Quelques définitions vues en Première S

Rappels

- En général, on note e_1, e_2, ..., e_n, les résultats possibles d'une expérience aléatoire. L'ensemble de ces éventualités est appelé **l'univers**, on note $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.
  Un événement A est un sous-ensemble ou partie de Ω.
- Un **événement élémentaire** est un événement qui ne contient qu'une seule issue, par exemple $\{e_i\}$.
  A chaque événement élémentaire $\{e_i\}$, on associe un nombre p_i, appelé **probabilité de** $\{e_i\}$ tel que $0 \leq p_i \leq 1$. On note $P(e_i) = p_i$.
  En outre $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$. On dit que l'on a défini une probabilité sur Ω.
- La probabilité d'un événement A, notée $P(A)$, est la somme des probabilités des événements élémentaires inclus dans A. On pose $P(\Omega) = 1$ et $P(\varnothing) = 0$.
- Dire que les événements élémentaires sont **équiprobables** signifie que $P(e_i) = P(e_j)$, pour tout i et j.
  Si leur nombre est n, alors $P(e_i) = \dfrac{1}{n}$, et la probabilité d'un événement A est donnée par :
  $P(A) = \dfrac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega}$.
- L'événement $\overline{A}$ est l'ensemble de toutes les issues qui ne sont pas dans A, $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.
  $\overline{A}$ est l'événement contraire de A.
  L'événement $A \cap B$ est réalisé si les événements A et B sont réalisés.
  L'événement $A \cup B$ est réalisé si l'événement A ou l'événement B est réalisé.



  Les probabilités de A, B, $A \cap B$ et $A \cup B$ sont liées par l'égalité : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
  Les événements A et B sont **disjoints ou incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$.
  Si A et B sont disjoints, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

I.B.2 Variable aléatoire

Variable aléatoire

$\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ est l'univers d'une expérience aléatoire sur lequel est définie une probabilité.
Une **variable aléatoire** X est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$.
Notons x_1, x_2, ..., x_q les valeurs de X. On note p_i la probabilité que X soit égal à x_i.
L'ensemble des couples (x_i, p_i) est **la loi de probabilité de** X. On la présente en général sous forme d'un tableau.

$X = x_i$	x_1	$\ldots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	$\ldots$	p_n

Paramètres d'une variable aléatoire

Espérance : $E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_qp_q = \sum_{k=1}^{q} x_kp_k$

Variance : $V(X) = [x_1 - E(X)]^2p_1 + \ldots + [x_q - E(X)]^2p_q = E(X^2) - [E(X)]^2$

Ecart-type : $\sigma(x) = \sqrt{V(X)}$

I.C Conditionnement par un événement de probabilité non nulle

I.C.1 Définition

Exemple

Dans un lycée, les 250 élèves qui étudient une seconde langue se répartissent, suivant le choix de cette langue, selon le tableau

Fréquences	allemand	italien	espagnol	total
garcons	0.2	0.044	0.156	0.4
filles	0.12	0.156	0.32	0.6
total	0.32	0.2	0.48	1

Une expérience aléatoire consiste à choisir un élève au hasard. On modélise cette expérience par la loi équirépartie sur l'ensemble Ω des 250 élèves.
On considère les événements A : "l'élève étudie l'allemand"
et F : "l'élève est une fille".
On s'intéresse à la probabilité notée $P_F(A)$, que l'élève étudie l'allemand sachant que c'est une fille.
Le lycée compte $0,6 \times 250 = 150$ filles dont $0,12 \times 250 = 30$ étudient l'allemand,
donc $P_F(A) = \dfrac{30}{150} = \dfrac{1}{5}$.
Cette probabilité est ainsi égale à $\dfrac{0,12}{0,6}$, c'est à dire $\dfrac{P(A \cap F)}{P(A)}$.

Définition 1:

Une loi de probabilité est définie sur un ensemble Ω.
A et B sont deux événements avec $P(A) \neq 0$.
La probabilité de l'événement B sachant A, notée $P_A(B)$, est définie par : $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Remarque : La probabilité conditionnelle $P_A(B)$ se note parfois $P(B/A)$.

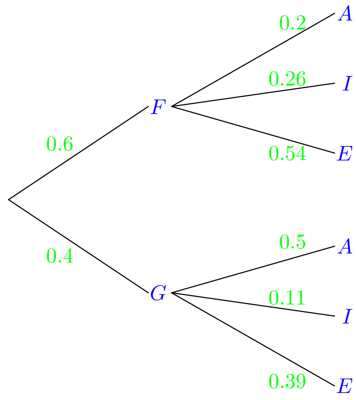
THÉORÈME 1 -facile à démontrer

A et B sont deux événements de Ω de probabilité non nulle.

1. $P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B) = P_A(B) \times P(A)$
2. $P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$

I.C.2 Représentation à l'aide d'un arbre de probabilités

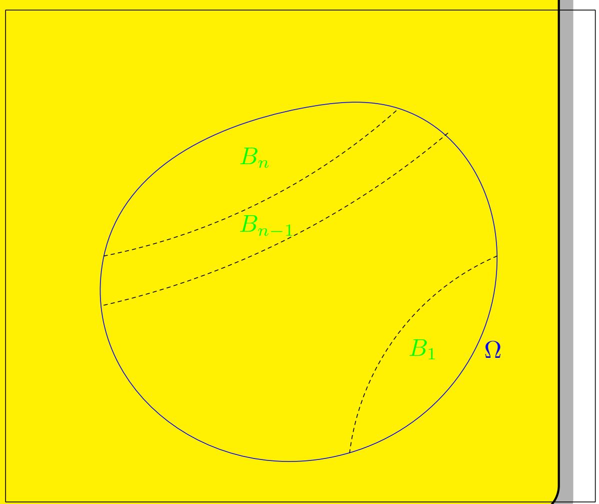
On peut représenter l'expérience aléatoire, décrite dans l'exemple précédent, par un arbre de probabilités.
Considérons les événements :
G : "l'élève est un garcon",
I : "l'élève étudie l'italien"
et E : "l'élève étudie l'espagnol".
Sur les deux premières branches, figurent les probabilités des événements F et G : $P(F) = 0,6$ et $P(G) = 0,4$.
Puis sur les branches suivantes, on note les probabilités de chacun des événements A, I ou E sachant F ou G.



I.C.3 Formule des probabilités totales

Définition 2:

Dire que les événements B_1, B_2, $\ldots$, B_n forment une **partition** de Ω signifie que les ensembles B_i sont deux à deux disjoints et que leur réunion est Ω.



THÉORÈME 2

Les événements B_1, B_2, $\ldots$, B_n forment une partition de Ω. Alors, pour tout événement A :
$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots + P(A \cap B_n)$, c'est à dire :
$P(A) = P_{B_1}(A) \times P(B_1) + P_{B_2}(A) \times P(B_2) + \ldots + P_{B_n}(A) \times P(B_n)$.

Démonstration : Les événements $A \cap B_1$, $A \cap B_2$, $\ldots$, $A \cap B_n$ sont deux à deux incompatibles et leur réunion est A, la formule en découle.

Remarque : On obtient en particulier, pour tous événements A et B de Ω, $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$.

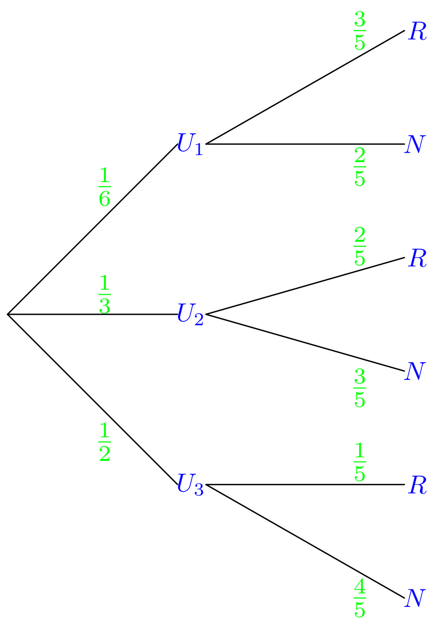
Exercice 1:

On dispose de trois urnes contenant chacune cinq boules, rouges ou noires. La première contient 3 rouges et 2 noires, la deuxième 2 rouges et 3 noires et la troisième 1 rouge et 4 noires.
Julien lance un dé bien équilibré.
S'il obtient 1, il extrait au hasard une boule de l'urne 1.
S'il obtient 3 ou 5, il extrait au hasard une boule de l'urne 2.
S'il obtient 2, 4 ou 6, il extrait au hasard une boule de l'urne 3.

1. Quelle est la probabilité que la boule tirée soit rouge et provienne de l'urne 1 ?
2. Quelle est la probabilité que la boule tirée soit rouge ?

Solution

1. Illustrons cette situation par un arbre pondéré où U_k ($k \in \{1,2,3\}$), et R désignent respectivement les événements : la boule est extraite de l'urne k et la boule obtenue est rouge. : La probabilité cherchée est $P(R \cap U_1)$. $R \cap U_1$ est représenté par la branche supérieure de l'arbre. On a : $P(R \cap U_1) = P_{U_1}(R) \times P(U_1)$ et donc $P(R \cap U_1) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{10}$.



2. Les événements U_1, U_2 et U_3 représentent une partition de Ω.
   On a alors : $P(R) = P(R \cap U_1) + P(R \cap U_2) + P(R \cap U_3)$
   $P(R) = P_{U_1}(R) \times P(U_1) + P_{U_2}(R) \times P(U_2) + P_{U_3}(R) \times P(U_3)$
   d'où $P(R) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{1}{6} + \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$.

I.D Evénements indépendants

Une loi de probabilité est définie sur un ensemble d'éventualité Ω.

I.D.1 Indépendance de deux événements

Définition 3:

Dire que deux événements A et B sont **indépendants** signifie que : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Remarques

- Si A et B sont indépendants et de probabilités non nulles alors :
$P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B)$ et de même $P_B(A) = P(A)$.
- La notion d'indépendance est une notion probabiliste, alors que la notion d'incompatibilité est une notion ensembliste.
À l'avenir, il ne faudra pas confondre (A et B indépendants) et (A et B incompatibles).

Théorème 3

Si deux événements A et B sont indépendants, alors :

1. les événements $\bar{A}$ et B sont indépendants
2. les événements A et $\bar{B}$ sont indépendants
3. les événements $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants

Démonstration : A et B sont indépendants, donc $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

1. $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A)P(B) = P(B)(1 - P(A)) = P(B)P(\bar{A})$ donc $\bar{A}$ et B sont indépendants.
2. C'est la même démonstration, il suffit de changer A et B.
3. d'après 1., $\bar{A}$ et B sont indépendants, et d'après 2., $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.

I.D.2 Indépendance de deux variables aléatoires

Définition 4:

X et Y sont deux variables aléatoires sur Ω.
On note $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les valeurs prises par X et $y_1, y_2, \ldots, y_n$ les valeurs prises par Y.
Dire que X et Y sont indépendantes signifie que pour tous i et j les événements $(X = x_i)$ et $(Y = y_j)$ sont indépendants.